

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA ESTUDI GENERAL
Departamento de Didáctica de las Matemáticas



HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, HISTORIA DE LA
EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y FORMACIÓN DE
PROFESORES

Luis Puig

Historia de las Matemáticas y Educación Matemática (HMEM):

El campo de investigación y sus variedades.

1. Historia de las Matemáticas *en* la Educación Matemática.

2. Historia *de* la Educación Matemática.

Working Groups en ICME:

1. The role of the history of mathematics in mathematics education.

2. The history of the teaching and learning of mathematics.

Combinaciones de 1 y 2.

Historia de las Matemáticas y Educación Matemática (HMEM):

El campo de investigación y sus variedades.

1. Historia de las Matemáticas *en* la Educación Matemática.

Historia de las Matemáticas como *herramienta para* la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Historia de las Matemáticas como *objeto de* enseñanza y aprendizaje (*en* la Educación Matemática).

Historia de las Matemáticas y Educación Matemática (HMEM):

El campo de investigación y sus variedades.

Historia *de* la Educación Matemática *en* la Educación Matemática

¿La Historia *de* la Educación Matemática es Historia de las Matemáticas?

Reviel Netz, textos deuteronomícos: *Synagōgē*, Pappus
Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides, Proclo

“la puesta en común del saber matemático [...] constituye un aspecto esencial de la actividad matemática, parte integral de la actividad de invención” (Belhoste, 1998, p. 289)

Netz, Reviel (1998). Deuteronomic Texts: Late Antiquity And The History Of Mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(2), pp. 261–288.

Belhoste, Bruno (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(2), pp. 289–304.

Funciones de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas

- Función de substitución (*vicariante*)
 - Función de desubicación (*dépaysante*)
 - Función cultural
-
- Qué historia
 - Qué matemáticas

Barbin, Évelyne (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'Association Mathématiques du Québec*, 37(1), 20–25.

INVESTIGACIÓN EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

El nuevo acercamiento consiste en realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el método histórico-crítico, y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, para después de esta experimentación, volver, a base de resultados prácticos, a tener una nueva visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos. (Filloy y Rojano, 1984, p. 2)

Filloy, Eugenio y Rojano, Teresa (1984). La Aparición del Lenguaje Aritmético-Algebraico. *L'Educazione Matematica*, 5(3), 1-16.

La problemática de la matemática educativa es la que determina lo que se indaga en la historia de las matemáticas.

La problemática de la matemática educativa establece:

- qué textos examinar en la historia
- qué preguntas hacer a los textos

Puig, Luis (2008). History of algebraic ideas and research on educational algebra. En Morgen Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education*. CD-version. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Puig, Luis (2011). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. En Victor Katz y Constantinos Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Resolución de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal

los alumnos utilizan sistemas de signos estratificados con estratos provenientes de

- el sistema de signos del lenguaje natural
- el sistema de signos de la aritmética

así como

- de los modelos concretos usados en las secuencias de enseñanza

Investigar los sistemas de signos anteriores al establecimiento (con Vieta, Bombelli, Descartes) del sistema de signos de carácter simbólico que se usa actualmente en el álgebra que se enseña en la secundaria.

Resolución de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal

los alumnos utilizan sistemas de signos estratificados con estratos provenientes de

- el sistema de signos del lenguaje natural
- el sistema de signos de la aritmética

así como

- de los modelos concretos usados en las secuencias de enseñanza

Modelado de las ecuaciones representándolas con segmentos y rectángulos con los que se opera.

Investigar sobre el uso de representaciones con figuras geométricas y métodos de cortar y pegar en textos históricos.

En esta relación entre historia de las matemáticas y matemática educativa, la historia de las matemáticas está subordinada a la matemática educativa.

Maneras de mirar las matemáticas del pasado.

Actores:

- Matemáticos
- Matemáticos historiadores
- Historiadores de las matemáticas
- Educadores matemáticos historiadores

Fried, Michael N. (2018). Ways of relating to the mathematics of the past. *Journal of Humanistic Mathematics*, 8(1), 3-23

El peligro de hacer historia *whig*.

alabar las revoluciones a condición de que hayan tenido éxito, subrayar ciertos principios de progreso en el pasado y producir un relato que es la ratificación del presente, si no su glorificación
Butterfield (1931/1951), p. 5.

Del relato histórico desaparece lo que es extraño a la forma actual de ver las cosas, sólo permanece lo que puede relacionarse con los intereses del presente.

Fried, Michael (2011). History of mathematics in mathematics education: problems and prospects. En Évelyne Barbin, M. Kronfellner, y Constantinos Tzanakis (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 6th ESU* (pp. 13–26). Wien: Holzhausen Verlag.

Butterfield, Herbert (1931/1951). *The Whig Interpretation of History*. New York: Charles Scribner's Sons.

Es posible conjurar el peligro de hacer historia *whig*

Desde el punto de vista de la matemática educativa, es útil para el presente no sólo lo que conduce al presente, sino también lo que no conduce al presente.

- Instrumento de caracterización de actuaciones de alumnos.
- Desubicación.

De modo que una investigación en la historia de las matemáticas determinada por la problemática de la matemática educativa no buscará sólo lo que conduce al presente, ni eliminará lo que no.

Función de desubicación de la historia de las matemáticas en la formación de profesores

Bertold Brecht: Efecto V (Verfremdungseffekt), extrañamiento o distanciamiento.

se procura [...] que lo sobreentendido resulte “no entendido”, pero con el único fin de hacerlo más comprensible. Para que lo conocido lo sea realmente, para que sea conocido a conciencia, debe dejar de pasar inadvertido; se deberá romper con la costumbre de que el objeto en cuestión no requiere aclaración. (Brecht, 1970, p. 182)

Brecht, Bertold (1970). *Escritos sobre el teatro*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Puig, Luis (2019). Observaciones acerca de la historia de las matemáticas en la matemática educativa. En José M. Marbán, Matías Arce, Ana Maroto, José María Muñoz-Escolano y Ángel Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 117-130). Valladolid: SEIEM.

Escritura y resolución de una ecuación de segundo grado en *L'Algebra* de Bombelli

El álgebra de Bombelli se publica en 1572.

Existe un manuscrito sin fecha, más extenso que el libro publicado, que Bortolotti, que lo descubrió hace unos cien años, dató ca1550, y que Jayawardene dató entre 1557 y 1560.

[Manuscript B 1569, Biblioteca comunale dell'Archiginnasio de Bologna]

Hay cambios entre el manuscrito y el libro publicado, debidos a la lectura que Bombelli hizo entre uno y otro de las *Aritméticas* de Diofanto, y a su invención de los signos “piu di piu”, “piu di meno”, “meno di piu” y “meno di meno”.

Estos cambios no afectan a los pasos de la resolución de la ecuación, sí a la terminología y al sistema de signos.

Bortolotti, Ettore, Ed. (1929). *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Libri IV e V comprendenti “La Parte Geometrica” inedita, tratta dal manoscritto B. 1569. Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna*. Bologna: Nicola Zanichelli, editore.

Jayawardene, S. A., “Rafael Bombelli, engineer-architect: Some unpublished documents of the Apostolic Camera”, *Isis* (1965) 56: 298–306,

L'ALGEBRA

PARTE MAGGIORE

DELL'ARIMETICA

DIVISA IN TRE LIBRI

DI RAFAEL BOMBELLI

DA BOLOGNA.

Novamente posta in luce.



IN BOLOGNA

Nella stamperia di Giovanni Rossi

M D L X X I I.

Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

SECONDO.

251

Agguagli si 4. p. R. q. L. 24. m. 20. $\div$ I. $\div$ 2. $\div$ in simili agguagliamenti bisogna sempre cercare, che la R. q. legata resti sola, però si leuà il 4. ad ambedue le parti, e si hauerà R. q. L. 24. m. 20. $\div$ I. eguale à 2. $\div$ m. 4. Quadri ciascuna delle parti, si hauerà 24. m. 20. $\div$ eguale à 4. $\div$ m. 16. $\div$ p. 16. lieuinfi li meni da ciascuna delle parti, e pongansi dall'altra parte si hauerà 4. $\div$ p. 20. $\div$ p. 16. eguale à 24. p. 16. $\div$ lieuinfi li 16. $\div$ à ciascuna delle parti, e si hauerà 4. $\div$ p. 4. $\div$ p. 16. eguale à 24. lieuinfi il 16. da ogni parte si haueranno 4. $\div$ p. 4. $\div$ eguale à 8. riduchisi à 1. $\div$ si hauerà 1. $\div$ p. 1. $\div$ eguale à 2. (seguiti il Capitolo) che il Tanto ualerà 1.

4. p. R. q. L. 24. m. 20. $\div$ I. Eguale à 2.

R. q. L. 24. m. 20. $\div$ I. Eguale à 2. m. 4.

24. m. 20. $\div$ I. Eguale à 4. m. 16. p. 16.

24. p. 16. $\div$ I. Eguale à 4. p. 20. p. 16.

24. $\div$ I. Eguale à 4. p. 4. p. 16.

8. $\div$ I. Eguale à 4. p. 4.

2. $\div$ I. Eguale à 1. p. 1.

2. $\div$ I. Eguale à 1. p. 1. p. $\frac{1}{2}$.

1. $\div$ I. Eguale à 1. p. $\frac{1}{2}$.

1. $\div$ I. Eguale à 1.

R. 2. Aggua-

Bombelli, 1526-1572, Bolonia, hoy Italia

$$\begin{array}{l}
4 \text{ p } R \text{ q } L \text{ 24 m } 20 \overset{1.}{\leftarrow} \text{Egual e } \overset{1.}{\text{à } 2} \\
R \text{ q } L \text{ 24 m } 20 \overset{1.}{\leftarrow} \text{Egual e } \overset{1.}{\text{à } 2 \text{ m } 4} \\
24 \text{ m } 20 \overset{1.}{\text{Egual e }} \overset{2.}{\text{à } 4 \text{ m } 16} \overset{1.}{\text{ p } 16} \\
24 \text{ p } 16 \overset{1.}{\text{Egual e }} \overset{2.}{\text{à } 4 \text{ p } 20} \overset{1.}{\text{ p } 16} \\
24 \overset{2.}{\text{Egual e }} \overset{1.}{\text{à } 4 \text{ p } 4 \text{ p } 16} \\
8 \overset{2.}{\text{Egual e }} \overset{1.}{\text{à } 4 \text{ p } 4} \\
2 \overset{2.}{\text{Egual e }} \overset{1.}{\text{à } 1 \text{ p } 1} \\
2\frac{1}{4} \overset{2.}{\text{Egual e }} \overset{1.}{\text{à } 1 \text{ p } 1 \text{ p } \frac{1}{4}} \\
1\frac{1}{2} \overset{1.}{\text{Egual e }} \overset{1.}{\text{à } 1 \text{ p } \frac{1}{2}} \\
1 \overset{1.}{\text{Egual e }} \overset{1.}{\text{à } 1}
\end{array}$$

Resolución de una ecuación

$$4 + \sqrt{24 - 20x} = 2x$$

$$\sqrt{24 - 20x} = 2x - 4$$

$$24 - 20x = 4x^2 - 16x + 16$$

$$24 + 16x = 4x^2 + 20x + 16$$

$$24 = 4x^2 + 4x + 16$$

$$8 = 4x^2 + 4x$$

$$2 = x^2 + x$$

$$2 + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$

$$1 = x$$

Operaciones para resolver la ecuación

$$4 + \sqrt{24 - 20x} = 2x$$

$$\sqrt{24 - 20x} = 2x - 4$$

Aislar la raíz

$$24 - 20x = 4x^2 - 16x + 16$$

Eliminar la raíz

$$24 + 16x = 4x^2 + 20x + 16$$

al-jabr (restaurar)

$$24 = 4x^2 + 4x + 16$$

al-muqābala

$$8 = 4x^2 + 4x$$

al-muqābala

$$2 = x^2 + x$$

reducir

$$2 + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

completar cuadrados

$$1 + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$

extraer la raíz cuadrada

$$1 = x$$

$$4 + \sqrt{24 - 20x} = 2x$$

$$\sqrt{24 - 20x} = 2x - 4$$

$$24 - 20x = 4x^2 - 16x + 16$$

$$24 + 16x = 4x^2 + 20x + 16$$

$$24 = 4x^2 + 4x + 16$$

$$8 = 4x^2 + 4x$$

$$2 = x^2 + x$$

$$2 + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$

$$1 = x$$

Las operaciones de Bombelli para resolver la ecuación comparadas con las habituales actualmente

Aislar la raíz

Eliminar la raíz

$$4x^2 + 20x + 16 - 24 - 16x = 0$$

$$4x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

El problema en el manuscrito

$\frac{1}{4}$ p. $\frac{2}{4}$ m. $\frac{2}{4}$	—	Egualè a $\frac{1}{2}$
$\frac{2}{4}$ m. $\frac{2}{4}$	—	Egualè a $\frac{1}{2}$ m. $\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$ m. $\frac{2}{4}$	—	Egualè a $\frac{1}{4}$ m. $\frac{1}{8}$ p. $\frac{1}{8}$
$\frac{2}{4}$ p. $\frac{1}{8}$	—	Egualè a $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{8}$ p. $\frac{1}{8}$
$\frac{2}{4}$	—	Egualè a $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{8}$
$\frac{8}{8}$	—	Egualè a $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{4}$
$\frac{2}{2}$	—	Egualè a $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1}{2}$
$\frac{2}{2} \frac{1}{4}$	—	Egualè a $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	—	Egualè a $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1}{2}$
1	—	Egualè a 1 et tante
vale la cosa cio è 1.		

Leuansi i meni da ciascuna parte, et mettansi da l'altra banda, si bauerà $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{20}$
 p. $\frac{1}{16}$ eguale a $\frac{1}{24}$ p. $\frac{1}{16}$: Leuansi le $\frac{1}{16}$ da ciascuna de le parti si bauerà $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{4}$
 p. $\frac{1}{16}$ eguale a $\frac{1}{24}$, Leuasi il $\frac{1}{16}$ da ogni parte si baueranno $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{4}$ eguale a $\frac{1}{8}$: ri-
 ducasi a $\frac{1}{1}$, si bauerà $\frac{1}{1}$ p. $\frac{1}{1}$ eguale a $\frac{1}{2}$. Seguitasi il Cap. la cosa ualerà $\frac{1}{2}$.

A *Guagliarsi 4 p.*
 $\frac{3}{4} \mid \frac{24}{4} m. \frac{20}{4} a$
 2. In simili agguagliamenti, bisogna sempre cercare, che la 3^a leg.^a resti sola: però si leuara il $\frac{3}{4}$ a tutte due le parti, si haue-
 ra $\frac{3}{4} \mid \frac{24}{4} m. \frac{20}{4}$ egua-
 le a $\frac{2}{4} m. \frac{4}{4}$: quadra-
 si ciascuna de le par-
 ti, si hauea $\frac{24}{4} m. \frac{20}{4}$
 eguale a $\frac{4}{4} m. \frac{16}{4} p. \frac{16}{4}$