1ª ESCUELA DE VERANO CEMAT
EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS:
ESTUDIO, APLICACIONES Y ENSEÑANZA
UNIVERSIDAD INTERNACIONAL MENÉNDEZ Y PELAYO

Fundación Luis Seoane. A Coruña, 8- 10 de Octubre de 2025

La transformación del pensamiento matemático: de geométrico a algebraico

Mª Rosa Massa-Esteve
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
m.rosa.massa@upc.edu

PROPÓSITO

- El propósito de esta ponencia es, desde un punto de vista conceptual, reflexionar sobre la transformación del pensamiento matemático de geométrico a algebraico, que tuvo lugar desde el siglo XVI al siglo XVIII.

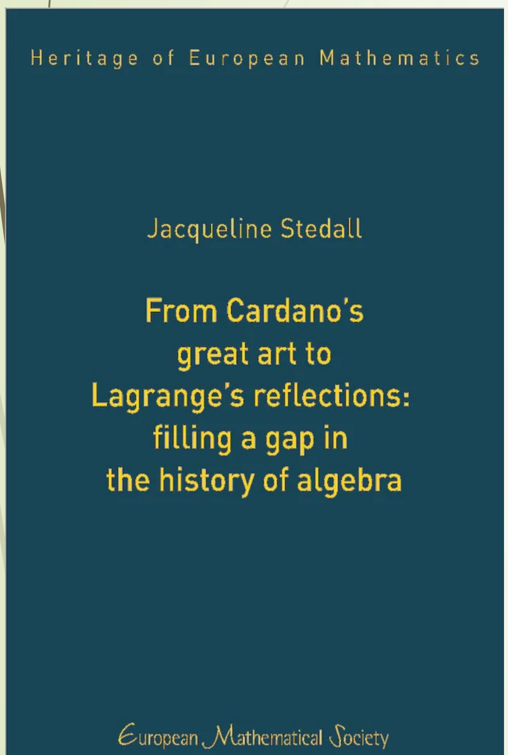
Sumario

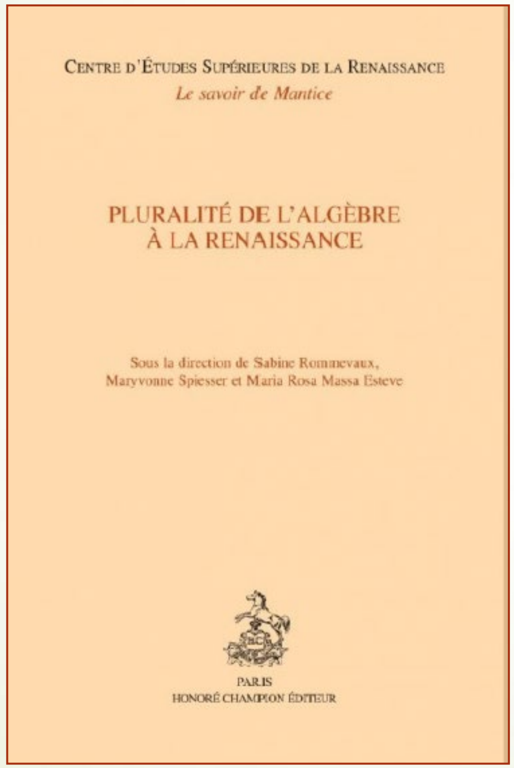
1. La algebrización de las matemáticas en el siglo XVII

- Las matemáticas en el siglo XVII se desarrollaron por la interacción de tres fuerzas fundamentales:
- 1) la herencia matemática clásica ejemplificada por las obras de Euclides y Arquímedes;
- 2) la emergencia del álgebra y su utilización en la geometría conducentes a una algebrización de la geometría; y finalmente
- 3) la revolución del infinito, es decir, la extensión del dominio propio de las matemáticas al uso de algoritmos infinitos y al estudio de objetos geométricos de dimensión infinita.

- Libros relevantes: Stedall (2011), Rommevaux et al. (2012), Mancosu (1996), Bos (2001) y Crippa-Massa (2023).

1. La algebrización de las matemáticas en el siglo XVII: Stedall (2011) y Rommevaux *et al.* (2012)





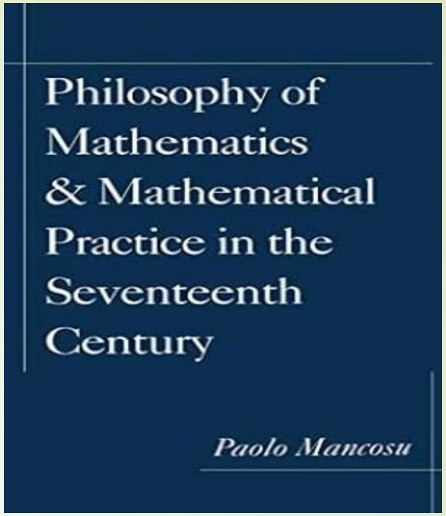
- Partiendo de la pluralidad del álgebra del Renacimiento, una de las principales novedades en las matemáticas del siglo XVII fue la articulación del álgebra y la geometría.

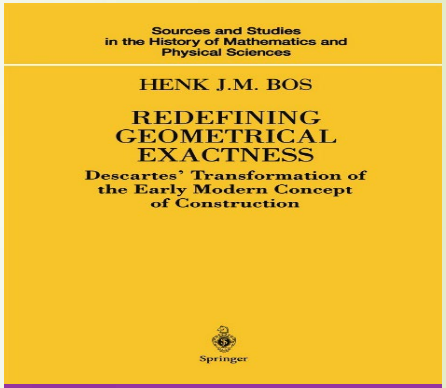
- El proceso que actualmente se llama de la algebrización de las matemáticas, que duró aproximadamente un siglo, fue principalmente el resultado de la introducción de procedimientos algebraicos para resolver problemas geométricos (Mahoney, 1980).

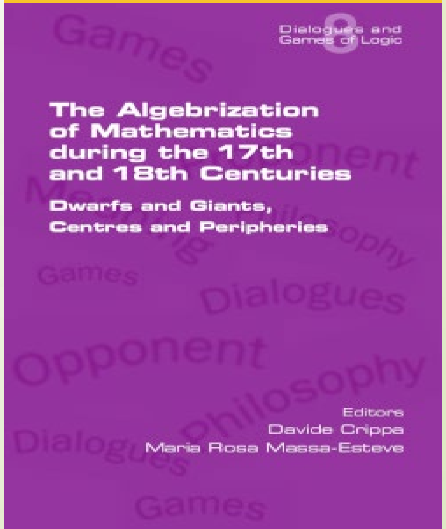
1. . La algebrización de las matemáticas en el siglo XVII

- Este proceso favoreció el desarrollo de dos innovaciones en la matemática: la creación de la, hoy llamada, geometría analítica y más tarde, el surgimiento del, hoy llamado, cálculo infinitesimal.

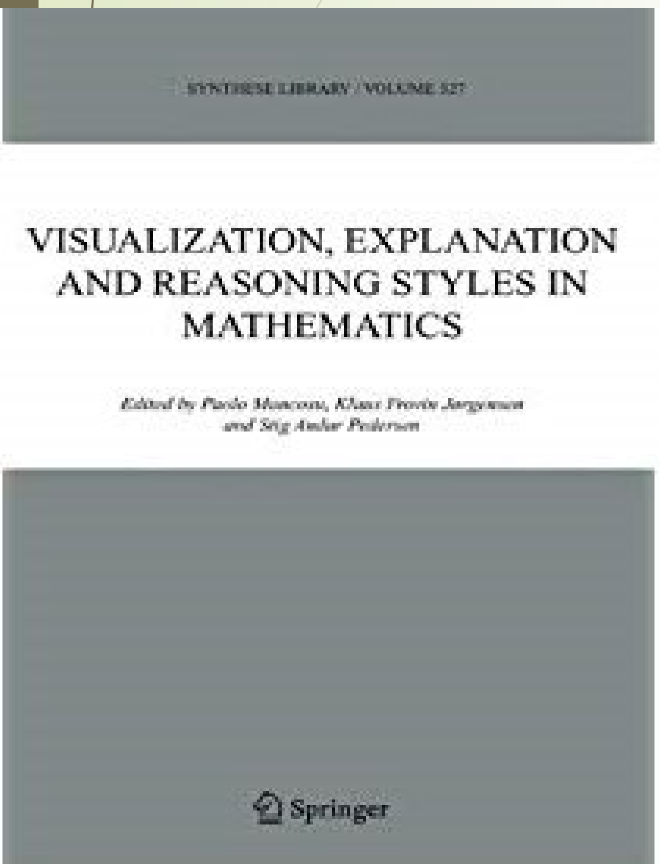
- Con el tiempo, estas disciplinas alcanzaron un poder excepcional al establecer conexiones entre las expresiones algebraicas y las curvas y entre las operaciones algebraicas y las construcciones geométricas.

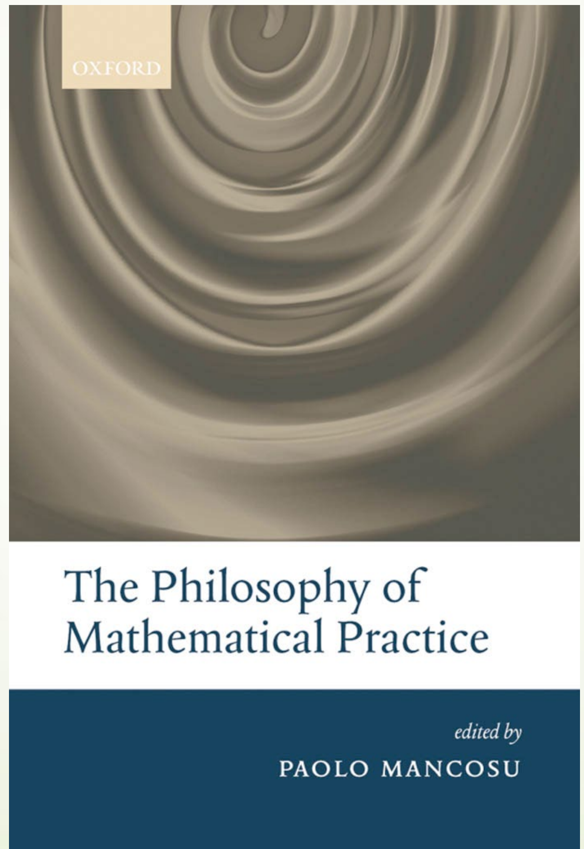


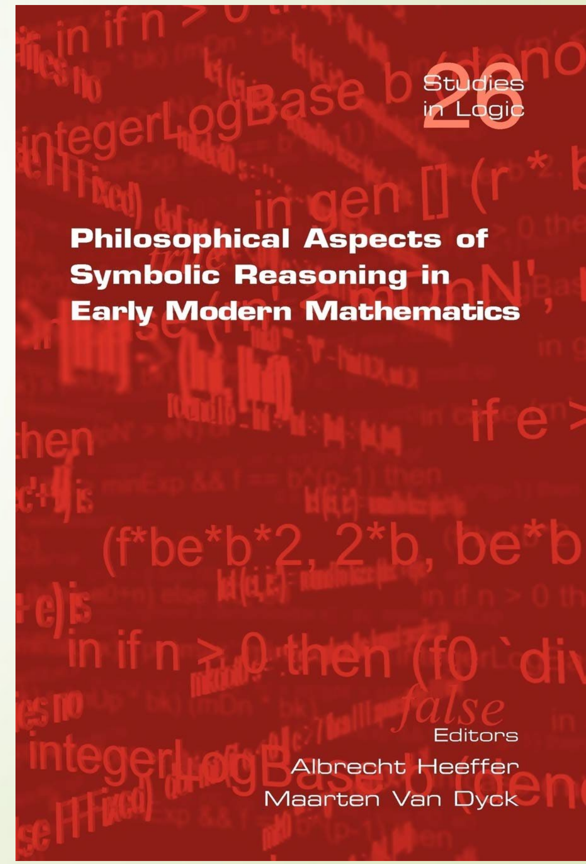




1. La algebrización de las matemáticas en el siglo XVII. Tratamiento de las matemáticas en estudios filosóficos de la matemática: Mancosu (2005, 2008) y Heeffer & Van Dyck (2010)







1. La algebrización de las matemáticas en el siglo XVII

- En este camino de fusión del álgebra y la geometría en el pensamiento del siglo XVII hay que destacar muchos aspectos dignos de análisis:

- la búsqueda de nuevos métodos analíticos recreando los métodos clásicos (geométricos) de los antiguos.

- Las líneas divisorias todavía fluctuantes, en cuanto a terminología y metodología, de la aritmética, el álgebra, el análisis y la geometría.

- Las soluciones a algunos obstáculos para hacer compatibles el álgebra y la geometría.

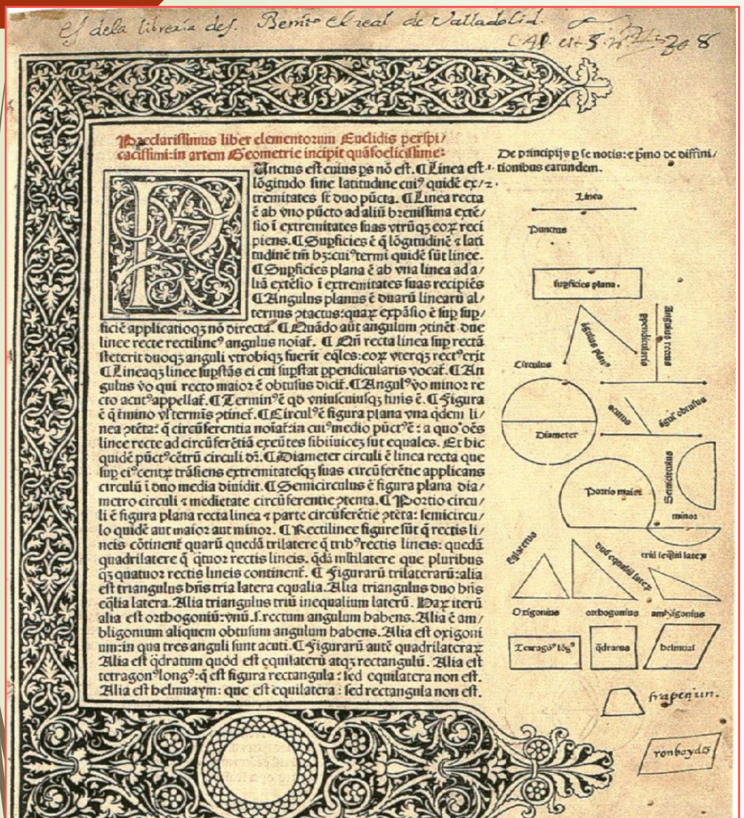
1.La algebrización de las matemáticas en el siglo XVII

- Para entender como se produjo la algebrización de las matemáticas en el siglo XVII, se requiere reflexionar sobre los precedentes estadios del siglo XVI en relación al estatus del álgebra, a las relaciones de esta con la aritmética y la geometría, al papel del lenguaje simbólico, que nos sugiere estas preguntas:

- ¿Podía la manipulación de este nuevo lenguaje ser considerado como un arte o un procedimiento? Aún más, ¿era una herramienta más fácil para obtener nuevos resultados o era únicamente una manera diferente de expresar ideas ya conocidas? ¿El uso del lenguaje simbólico mostraba que la resolución de los problemas geométricos era más fácil? ¿Cómo fue evolucionando su aceptación?

2. La geometría en Grecia (aprox. 300 aC.)

2. La geometría en Grecia. Euclides: *Los Elementos* (aprox. 300 aC)



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quãfoelicissime:

Página de la primera edición latina impresa europea de los *Elementos* de Campanus de Novara. La publicó Erhard Ratdolt en Venecia el año 1482 con el tíulo *Preclarissimus liber Elementorum Euclidis Perspicacissimi.*

Esta obra que se cree puede ser colectiva es la que ha tenido más ediciones después de la Biblia, se calculan unas 1000.

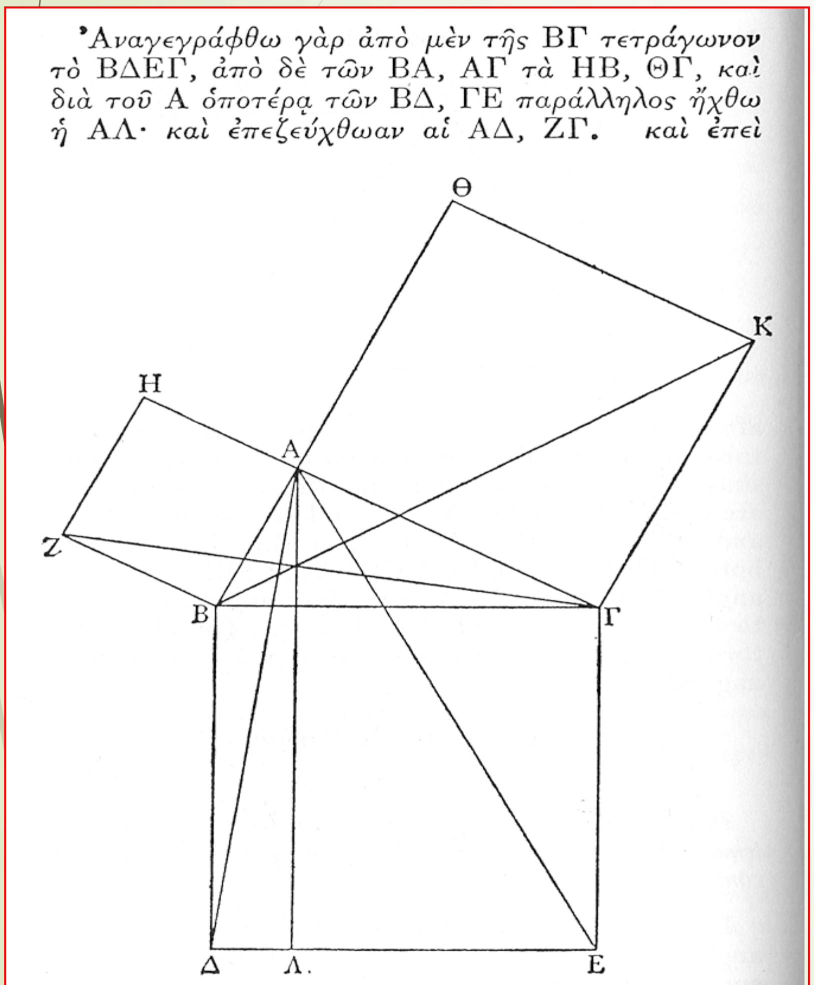
Es el libro que más influencia cultural ha tenido a lo largo de la Historia. Ha sido libro de texto durante muchos siglos y ha influido extraordinariamente a los grandes autores de las revoluciones científicas como Galileo, Newton, etc.

La obra recoge los conocimientos matemáticos de diferentes escuelas griegas.

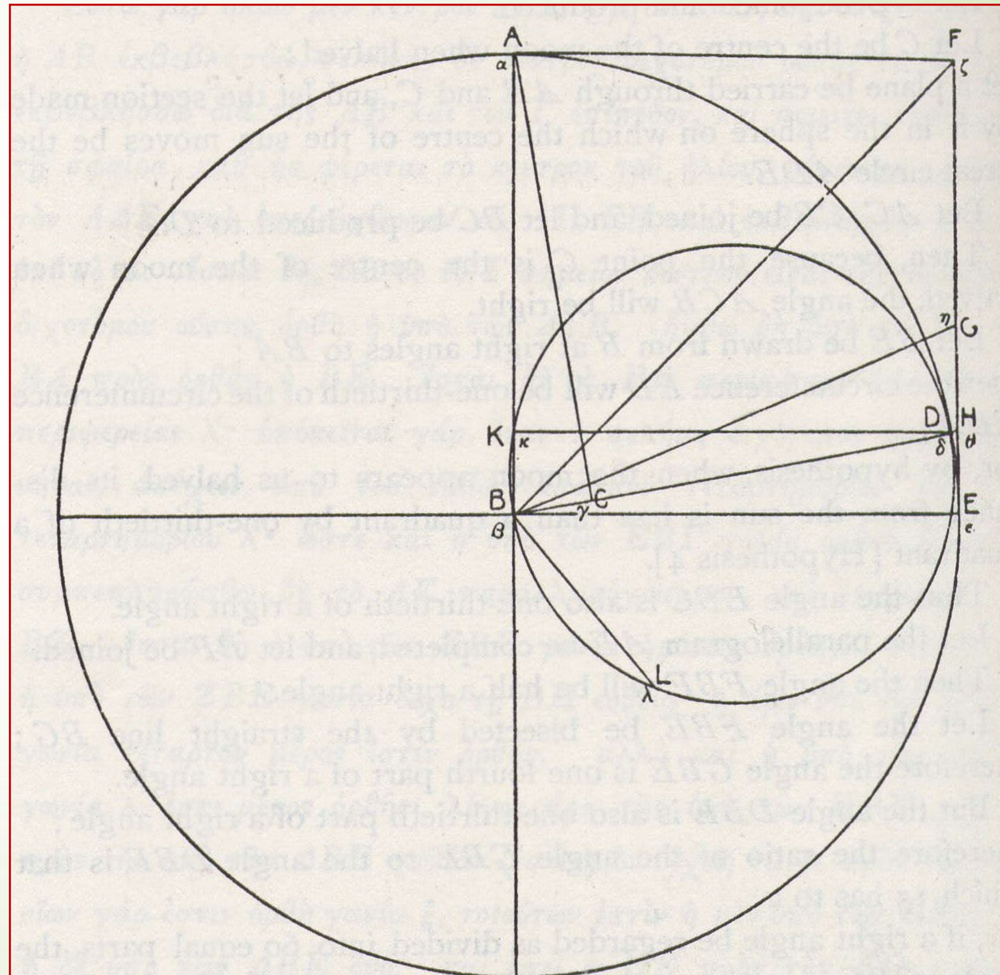
Son 13 libros: los 6 primeros de geometría plana, 3 de teoría de números, el nº 10 sobre los inconmensurables y los 3 últimos sobre la geometría de sólidos.

En cuanto al método es axiomático deductivo ya que presenta primero los axiomas, los postulados y con las definiciones demuestra 465 proposiciones.

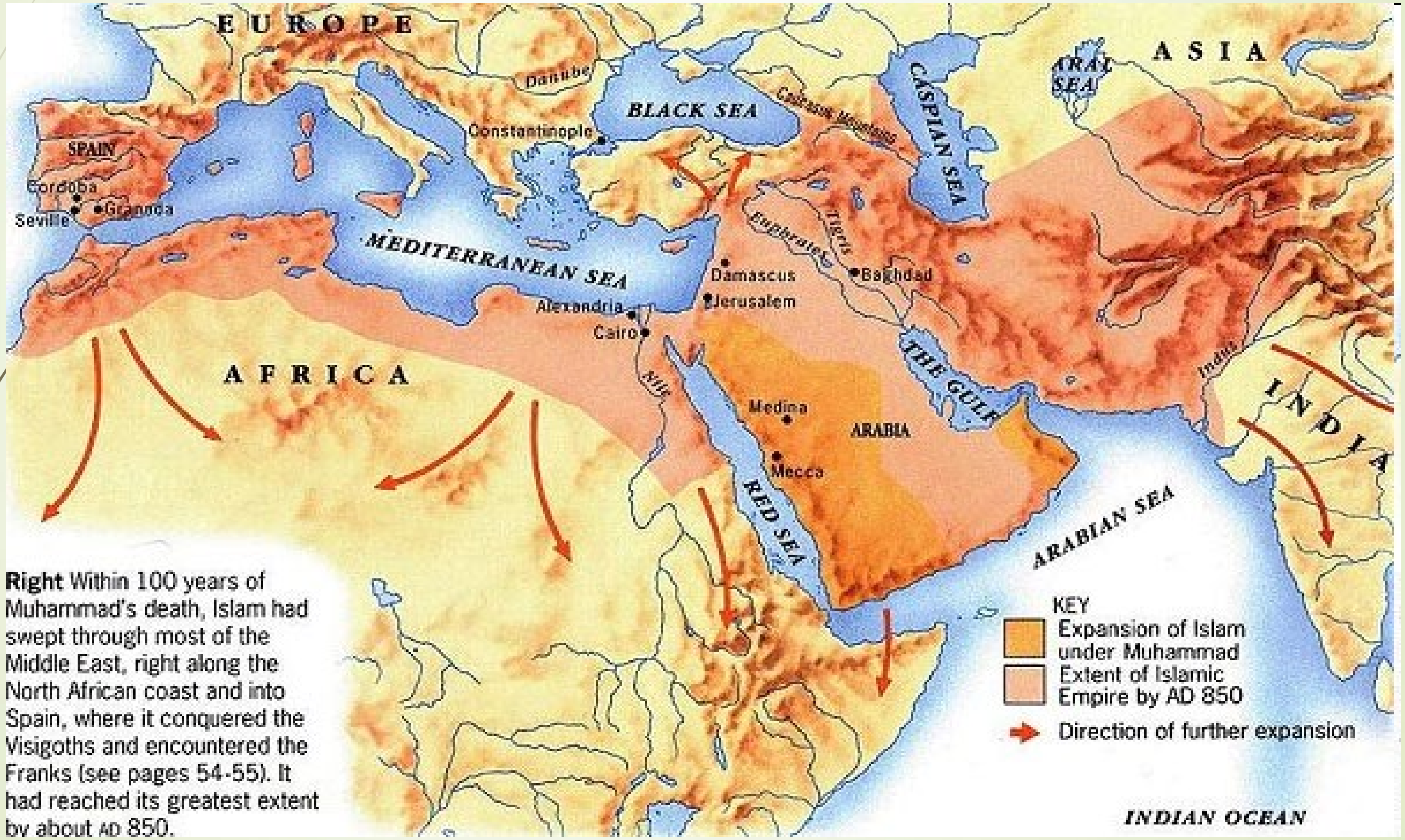
2. La geometría en Grecia. Aristarco de Samos (aprox. 310-230 aC.) *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna* (aprox. 230 aC.)



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ



3. Chèber -Almucabola y aritméticas mercantiles (IX-XV). Abu Ja'far Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (780- 850)



3. Chèber -Almucabola y aritméticas mercantiles (IX-XV).

inuentum, scilicet radicibus, substantiis et numeris. Solus numerus tamen neque radicibus neque substantiis vlla proportione coniunctus est. Earum igitur radix est omnis res ex vnitatibus cum se ipsa multiplicata aut omnis numerus supra vnitatem cum se ipso multiplicatus: aut quod infra vnitatem diminutum cum se ipso multiplicatum reperitur. Substantia verò est omne illud quod ex multiplicatione radicis cum se ipsa colligitur. Ex his igitur tribus modis semper duo sunt sibi inuicem coaequantia, sicut diceres

Substantiae radices coaequant
Substantiae numeros coaequant, et
Radices numeros coaequant.

De substantiis radices coaequantibus. Ca [put] pri [mum].

Substantiae quae radices coaequant sunt, si dicas,
Substantia quinque coaequatur radicibus.

Radix igitur substantiae sunt 5, et 25 ipsam componunt substantiam, quae videlicet suis quinque aequatur radicibus. Et etiam si dicas,

Tertia pars substantiae quatuor aequatur radicibus:

Radix igitur substantiae sunt 12, et 144 ipsam demonstrant substantiam. Et etiam ad similitudinem,

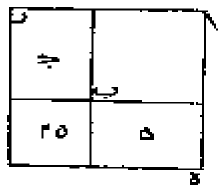
Quinque substantiarum 10 radices coaequantium. Vna igitur substantia duabus radicibus aequiparatur, et radix substantiae sunt 2 — et substantiam quaternarius ostendit numerus.

Su obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) fue traducida al latín por Roberto de Chester con el título *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), de donde proviene el nombre actual de álgebra.

Las ecuaciones se presentan expresadas en lenguaje retórico y no hay símbolos.

3.La justificación geomètrica de al-Khwârizmî (traducción Frederic Rosen 1831) http://archive.org/stream/algebraofmohammeookhuwuoft

علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ
ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد
اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو
خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره
والمال تسعة وهذه صورته

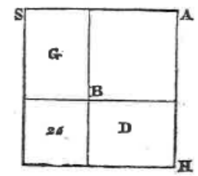


واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا
نجعل المال سطحا مربعا مجهول الاضلاع وهو سطح اد ثم نضم
اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح اد وهو
ضلع هن والسطح هب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه
وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع
متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر
ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون
يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان
ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين علي نقطة

(16)

the first quadrate, which is the square, and the two quadrangles on its sides, which are the ten roots, make together thirty-nine. In order to complete the great quadrate, there wants only a square of five multiplied

(11) by five, or twenty-five. This we add to thirty-nine, in order to complete the great square S H. The sum is sixty-four. We extract its root, eight, which is one of the sides of the great quadrangle. By subtracting from this the same quantity which we have before added, namely five, we obtain three as the remainder. This is the side of the quadrangle A B, which represents the square; it is the root of this square, and the square itself is nine. This is the figure:—



*Demonstration of the Case: "a Square and twenty-one Dirhems are equal to ten Roots."**

We represent the square by a quadrate A D, the length of whose side we do not know. To this we join a parallelogram, the breadth of which is equal to one of the sides of the quadrate A D, such as the side H N. This paralellogram is H B. The length of the two

3. Chèber et Almucabola y aritméticas mercantiles. Leonardo de Pisa (Fibonacci) (c. 1170-1250): *Liber abaci* (1202)

Capítulos 1-7. Números hindús-arábigos. Métodos de cálculo.

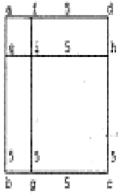
Capítulos 8-11. Problemas de mercaderes.

Capítulos 12 y 13. Problemas recreacionales que plantean ecuaciones.

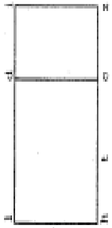
Capítulo 14. Cálculo de raíces cuadradas y cúbicas y de los binomios.

Capítulo 15. Sobre las Reglas Geométricas y sobre los problemas de álgebra y al-mucabala.

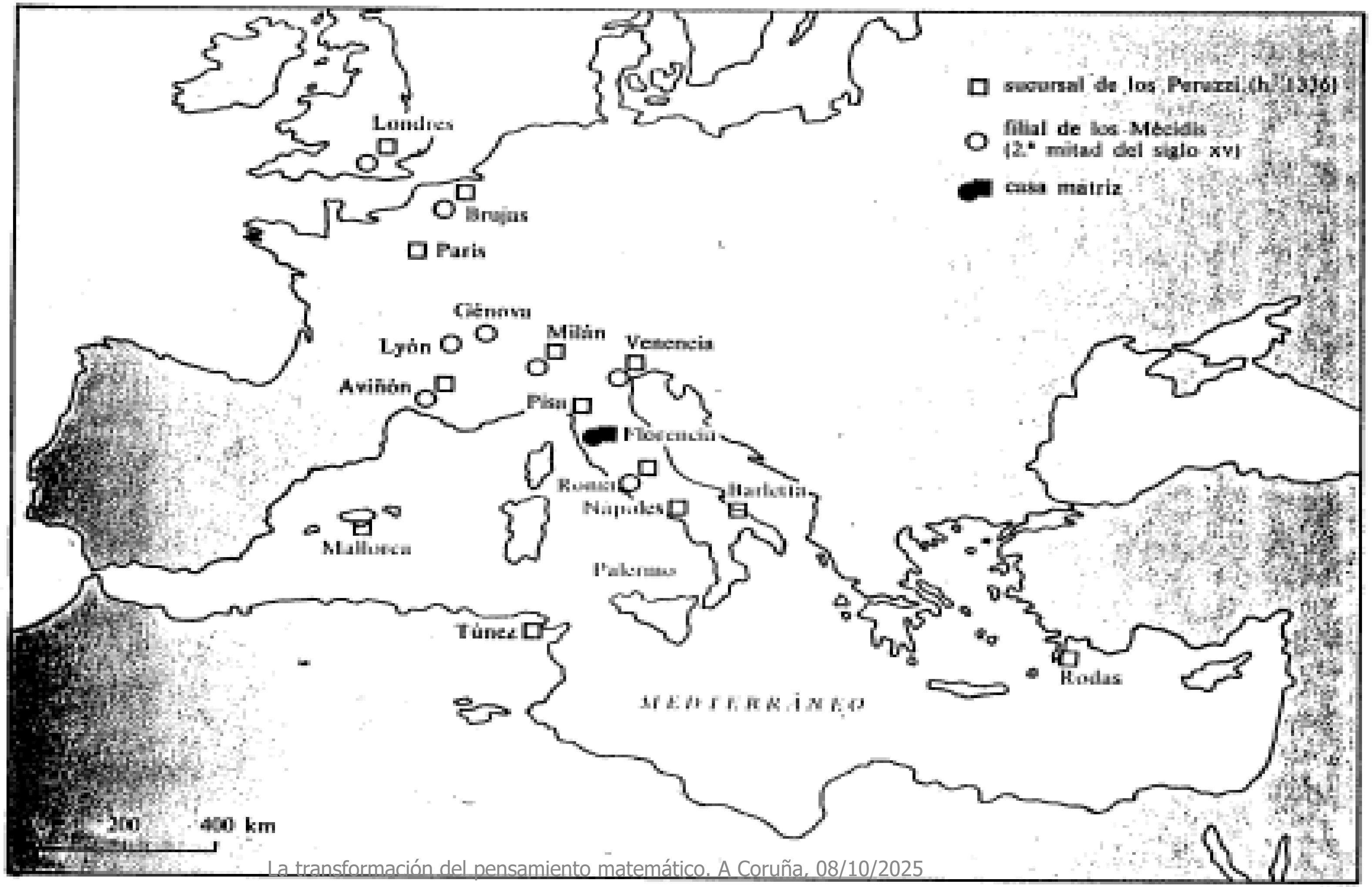
556 II. Liber Abaci (1202) Leonardo de Pisa (1170-1250)

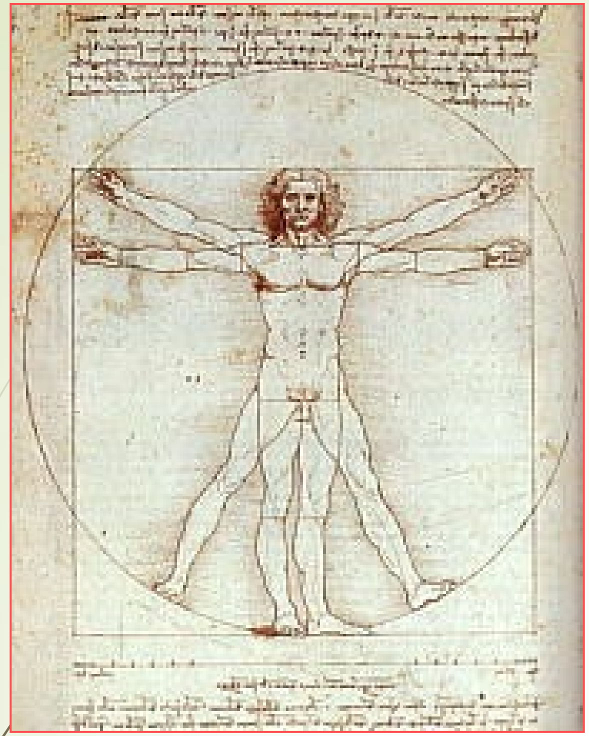


39. Therefore half of the number of roots is 5; this multiplied by itself makes 25 which added to the 39 makes [p408] 64; the root of it is 8; if half of the number of roots, namely 5, is subtracted from the 8, then there will remain 3 for the root of the sought census. Therefore the census is 9, and the ten roots are 30, and thus the census plus the ten roots is equal to 39. I shall manage to show how this rule works using two figures; indeed a square .abcd. is taken having each side greater than 5 cubits, and the point .e. is taken on the side .ab., the point .f. on the side .ad., the point .g. on the side .bc., and the point .h. on the side .cd.; and let each line segment .be., .cg., .ch., and .df. be 5 cubits, and connect the line segments .eh. and .fg.; and because the rectangle .ac. is a square the line segment .da. will be equal to the line segment .ba.; and when equals are subtracted from equals, then those which remain are equal; therefore if from .da. is subtracted .df., and from .ba. is subtracted .be., because each is 5, the line segment .ea. will remain equal to the line segment .fa.; but the line segment .ae. is equal to the line segment .fi., as the line segment .fg. is equal to the line segment .ab.; indeed the line segment .ig. is equal to the line segment .eb., and for the same reason the line segment .ei. is therefore equal to the line segment .af., as the line segment .eh. is equal to the line segment .ad., and the line segment .ih. is equal to the line segment .fd.; therefore the rectangles .ef. and .gh. are squares; I shall therefore put for the sought census the square .ef. which has unknown side; the root of the census is each of the line segments .ei. and .if.; but the line segment .ei. multiplied by the line segment .ig. is the area of the rectangle .bi., that is the five roots of the census .ef., and similarly the area of the rectangle .id. constitutes 5 roots of the census .ef.; but the census plus 10 roots is equal to 39 denari; therefore the aforesaid three areas .ef., .bi., and .id. total 39; therefore if 25 is added to it, namely the square .gh., each side of which is 5, then 64 is had for the entire square .abcd.; the root of this, namely 8, is the length of each side of the square; therefore if the line segment .be. is subtracted from the line segment .ba., namely the 5 from the 8, then there will remain 3 for the line segment .ea.; therefore the root of the sought census is 3, and the census is 9; this added to ten of its roots makes 39, as must be.



3. Chèber-Almucabola y aritméticas mercantiles (IX-XV)



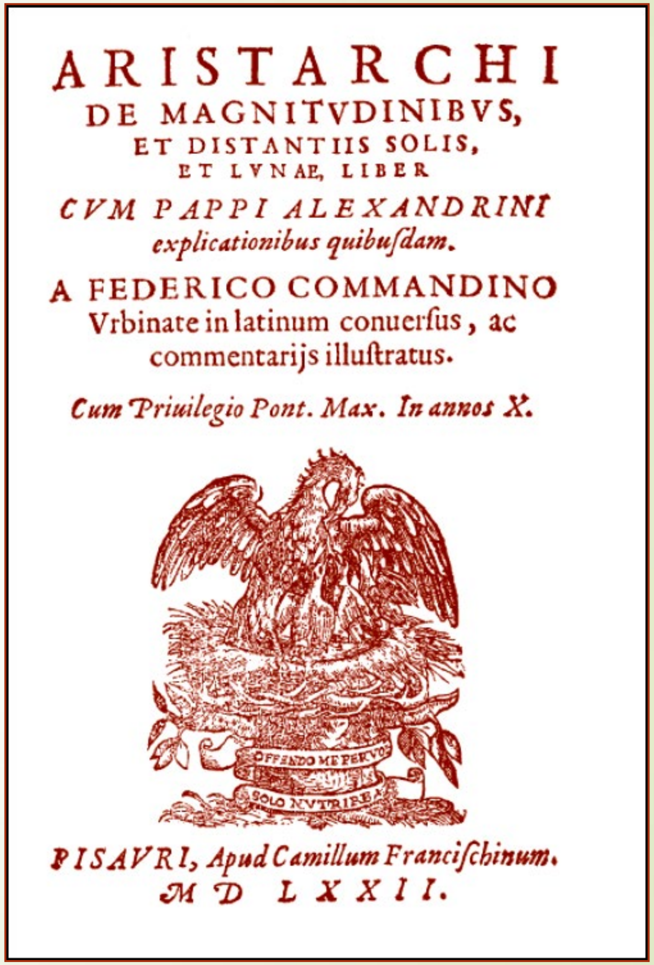


4. Siglo XVI: Las álgebras o arte mayor del Renacimiento

- El periodo comprendido entre mediados del siglo XIV y principios del XVII fue la época del Renacimiento, así llamada por el resurgir o renacer del interés por la Grecia y la Roma de la Antigüedad clásica.
- El latín y el griego eran las claves indispensables para el estilo, los conocimientos y el buen gusto y asumieron un significado fundamental en la educación que se conservarían durante siglos.

4. Siglo XVI: Las álgebras o arte mayor del Renacimiento

- Se produce la normalización de los caracteres numéricos hindús
- El álgebra aún no es considerada como una parte independiente dentro de las matemáticas
- Se empiezan a recuperar (directamente!) textos griegos y se traducen al latín. Como ejemplo podríamos citar Federico Commandino (1506-1575) que traduce las grandes obras clásicas de Arquímedes, Ptolomeo, Euclides, Aristarco y Apolonio.



- Lucas Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita*, Venice, 1494.
- Heinrich Schreiber, *Ayn new Kunstlich Buech*, Nuremberg, 1518.
- Estienne de la Roche, *Larismetique nouvellement composee*, Lyon, 1520.
- Francesco Ghaligai, *Summa de arithmetica*, Florence, 1521.
- Christoff Rudolff, *Behend und hübsch Rechnung durch die Kunstreichen Regeln Algebre, so gemeincklich die Coss gennent werden*, Strasbourg, 1525.
- Francesco Feliciano, *Libro di arithmetica e geometria speculativa e practicale*, Venice, 1526.
- Girolamo Cardano, *Ars magna*, Nuremberg, 1545.
- Niccolò Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse*, Venice, 1546.
- Joannis Scheubel, *Euclidis … sex libri priores … Algebrae porro regulae*, Basle, 1550; section on algebra reprinted as *Algebrae compendiosa faciliusque descriptio*, Paris, 1551.
- Marco Aurel, *Libro primero de arithmetica, algebratica*, Valencia, 1552.
- Jacques Peletier, *L'algebre departie en deus livres*, Lyon, 1554; a shortened and slightly rearranged version was published in Latin as *De occulte parte numerorum quam algebram vocant*, Paris, 1560.
- Pierre Forcadel, *L'arithmetique*, Paris, 1556.
- Valentin Mennher, *Aritmetique seconde parte*, Antwerp, 1556.
- Caspar Peucer, *Logistice … regulae arithmeticae, quam cossam & algebram quadratum uocant, compendio*, Wittemberg, 1556.
- Robert Recorde, *The whetstone of witte whiche is the seconde parte of arithmetike*, London, 1557.
- Juan Pérez de Moya, *Compendio de la regla de la cosa o Arte Mayor*, Burgos, 1558.
- Jean Borrel [Buteo], *Logistica*, Lyon, 1559.
- Pierre de la Ramée [Petrus Ramus], *Algebra*, 1560.
- Antic Rocha, *Arithmetica*, 1564.
- Pedro Núñez, *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, 1567.

4. Siglo XVI. Las álgebras o arte mayor del Renacimiento : Luca Pacioli (1445-1517)

Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita: Nouamente impressa In Toscolano su la riua dil Benacense et vnico carpionista Laco: Amenissimo Sito: de li antique e euidenti ruine di la nobil cita Benaco ditta illustrato: Cum numerosita de Impatorij epithaphij di antique e perfette littere sculpiti dotato: e cum finissimi e mirabil colone marmorei: inumeri fragmenti di alabastro porphidi e serpentini. Cose certo lettor mio diletto oculata fide miratu digne sotterra se ritrouano.

Continentia de tutta lopera:

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.
Proportioni e pportionalita a notitia del 5.º de Euclide: e de tutti li altri soi libri.
Chiaui: ouero euidetie numero. 13. per le quantita continue pportionali del 6.º e 7.º de Euclide extratte.
Tutte le parti de lalgorismo: cioe releuare partire: multiplicare: sumare: e sotrare: con tutte sue pue in sani e rotti e radici e progressioni.
De la regola mercantesca ditta del. 3. e soi fondameti co casi exeplari p c.º m.º & g. guadagni: perdite: transportationi: e inuestite.
Partir: multiplicar: sumar: e sotrar de le pportioni: e de tutte sorti radici.
De le tre regole del Catayn ditta positione: e sua origine.
Euidentie generali: ouer conclusioni numero. 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie non si podesse.
Tutte sorte binomij e recisi: e altre linee irrationali del decimo de Euclide.
Tutte regole de Algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.
Copagnie in tutti modi: e lor partire.
Socide de bestiami: e lor partire.
Fitti. pescioni: cottimi: liuelli: logagioni: e godimenti.
Baratti in tutti modi semplici: composti: e col tempo.
Cambi real: secchi: fittitij: e diminuti: ouer communi.
Meriti semplici e a capo danno: e altri termini
Resti: saldi: sconti: de tepo e denari: e de recare a vn di piu partite.
Ori: argenti: elloro affinare: e carattare.
Molti casi e ragioni straordinarie: varie e diuerse a tutte occurretie: como nella sequente tauola appare ordinatamente de tutte.
Ordine a saper tener ogni coto: e scripture: e del quaderno in vinegia.
Tariffa de tutte vsançe e costumi mercanteschi in tutto el mondo.
Pratica e theorica de geometria: e de li cinq corpi regulari: e altri depedenti
E molte altre cose de grandissimi piaceri: e frutto: commo diffusamente per la sequente tauola appare.

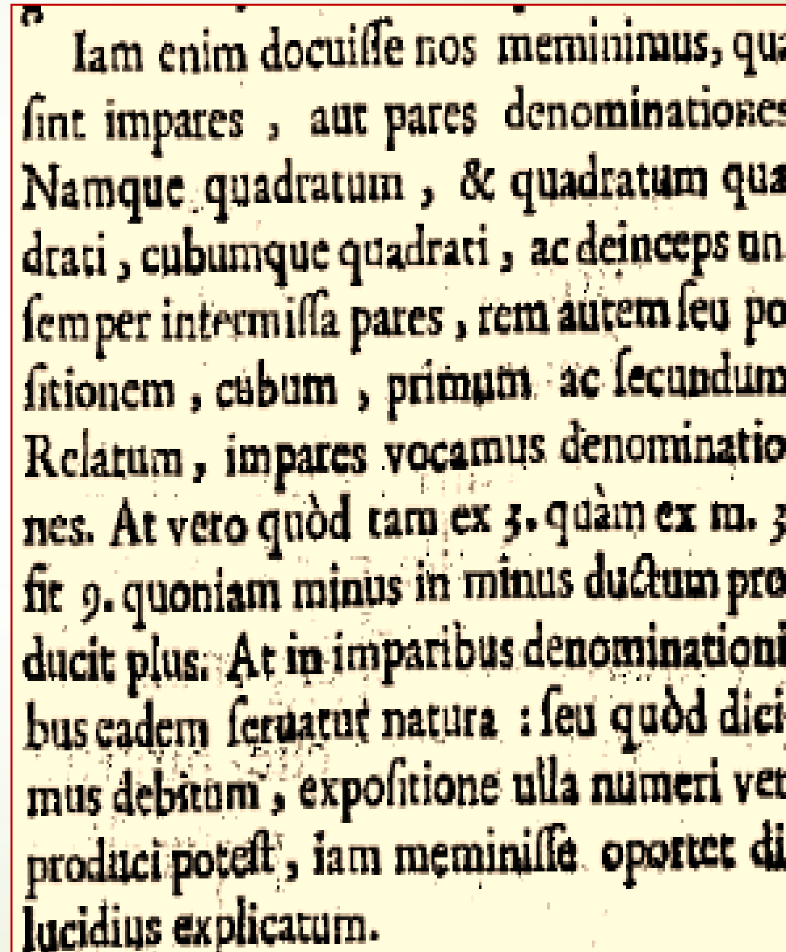
- Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni & proporcionalita,*
- Venice,Paganino de Paganini, 1494.
- La obra de Pacioli trata con aritmética y geometria, I en la *Distinctio* 8 él también trata con:
- “la parte maxime necessaria a la pratica de Arithmetica e anche de Geometria detta del vulgo comunemente Arte Magiore over la regola de la cosa over Algebra e Almucabala” (Pacioli, 1494, fo 111v).

El Renacimiento: Girolamo Cardano (1501-1576): *Artis magnae sive de Regulis Algebraicis* (1545)

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HIE. CAR.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſ ſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.



Iam enim docuiſſe nos meminimus, quæ ſint impares, aut pares denominationes. Namque quadratum, & quadratum quadrati, cubumque quadrati, ac deinceps una ſemper intermiſſa pares, rem autem ſeu poſitionem, cubum, primum ac ſecundum Relatum, impares vocamus denominationes. At vero quòd tam ex 3. quàm ex m. 3 fit 9. quoniam minus in minus ductum producit plus. At in imparibus denominationibus eadem ſeruatur natura: ſeu quòd dicimus debitum, expoſitione ulla numeri veri produci poteſt, iam meminiſſe oportet di lucidius explicatum.

4. Siglo XVI. Tradición Cósica (Rudolff, 1525, Aurel, 1552). Los símbolos

de Cubo / Also gesprochen/das sie erwechst von einem cubo jn sich cubice multiplicirt. Als. 512. erwechst von 8 mal 8 zu 8 mal.

Volgt hernach ein Tafel/hat drey Exempla Das erste jn proportione dupla. Wirt yede zal jn der nehist volgende behalten zwey mal. Das ander exemplum jn Tripla/wirt eine jn der andern behalten drey mal. Das drit exempelum jn quadrupla proportione/ Wirt ye eine jn der nehist grössern behalten zu vier mal.

φ	2e	ʒ	ce	ʒʒ	ß	ʒce
1	2	4	8	16	32	64
1	3	9	27	81	243	729
1	4	16	64	256	1024	4096

Dergleichen magstu exempla machen jn andern proportion/nicht alleyn jn gantzen/sondern auch jn gebrochnen zalen / Als denn das nach folgend exemplum anzeyget/wirt ye eine jn der nehist vorlauffenden/behalten anderthalb mal / Heysset die proportion sesquialtera

φ	2e	ʒ	ce	ʒʒ	ß	ʒce
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$

como te has de hauer con ellos, quando huuiesses menester mas de los ya dichos.

Los caracteres.	φ.	2e.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	bß.	ʒʒʒ.	cce.
Prop. dupla.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
Prop. tripla.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.
Prop. q̃drupla.	1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.	65536.	262144.

De manera que si la 2e vale 2, la proporcion sera dupla: si 3, tripla: si 4, quadrupla, como en la suso dicha tabla has visto. Por lo qual quando supieres la valor dela 2e (que otro no se busca) sabras el ʒ, ce, ʒʒ, &c. Y mas todos quantos querras.

Nota. El caracter no lo has de tomar, ni entẽder por numero, o quãtidad simple, sino por dignidad, grado, o casa de vna continua proporcion. Como el ʒ, es la segũda quantidad de vna continua proporcion: y el ß, es la quinta: Y assi los otros, començando de mas q̃ de vno: porque el vno no es numero, sino principio de numero, como al principio has visto.

Digo q̃ la 2e, es la primera: cuyo valor te dira el nombre de tal cõtinua proporcion: si es 2, sera dupla: si es 3, tripla, como dicho tengo. Y el φ, es tomado como vno.

No tan solamente podras poner la suso dicha tabla, o otra qualquiera de numeros enteros, mas tambien de numeros quebrados. Solamente empero guarden vna qualquiera proporcion continua, como por este exemplo siguiente veras, que es proporcion sesquialtera.

Los caract.	φ.	2e.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	bß.	ʒʒʒ.	cce.
Prop. sesquialt.	1.	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{128}{2187}$	$\frac{256}{6561}$	$\frac{512}{19683}$

De la mesma manera, que en los enteros has visto, sera aqui en los quebrados, la 2e, vale $\frac{2}{3}$, que es sesquialtera: el ʒ, sera $\frac{4}{9}$, &c. Como vees en la dicha tabla. Lo qual no haze poco al caso saberlo.

Summar de caracteres.

Como quiera que los caracteres seã dignidades, o grados de vna

4. Siglo XVI. El Arte Mayor o el álgebra del Renacimiento

- Marco Aurel (aprox. 1520) (notación alemana)
  - *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* (1552)

- Juan Pérez de Moya (1513-1596)
  - *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor* (Burgos, 1558)
  - *Arithmetica Practica y Speculativa* (1562)

- Antic Roca (aprox. 1500-1580)
  - *Arithmetica* (1564)

- Pedro Núñez (1502-1578)
  - *Libro de álgebra en aritmética y geometría* (1567)

4. Siglo XVI. *Libro Primero de Aritmetica Algebratica* (1552). Marco Aurel

- Aurel expone de manera muy clara que quiere decir por análisis, al principio del capítulo 14è, aunque el autor no hable de análisis:

- “Ya que has visto medianamente lo necessario para la operacion del algebra, regla de la cosa, o arte mayor, agora te quiero mostrar, como te has de regir en hazer y proponer las demandes que por ella auras, o querras hazer. Y digo que para hazer una demanda, por la dicha regla, has de imaginar q tal cuenta o demanda ya es hecha, y respondido, y tu agora la quieres provar. Y pornas q la respuesta fuesse una x, con la qual has de procedir con los avisos y regles dadas, como si fuere la propia quantidad sabida, o respuesta verdadera, hasta tanto que venga a la postre la vltima respuesta, debaxo de caracterea, o quantidades ocultes. La qual, o las quales diras ser ygual a lo q tu querrias que viniesse. Y luego praticaras esta tal ygualacion, por vna de las 8 ygualaciones siguientes, a la que serà sujeta, y por ella te serà declarada la valor de la x oculta, y primero propuesta” (Aurel, 1552, f. 76v.)

4. Siglo XVI. *Arithmetica* (1564, p. 258). Antic Roca

plicares mas con menos, o al contrario, siempre saldra menos: esto sabido has de tener cuēta en saber quando multiplicares vn character de vna especie por character de otra especie (como vn censo con vn cubo, o vna cosa por vn censo, o otros qualesquier characteres) q̃ character resultara: y esto has de colligir del ordē dellos aqui puesto.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
N.	co.	ce.	cu.	cce.	r.	cecu.	rr.	ccce.	ccu.

Desta orden puesta, como acōsejan todos, puedes colligir de la multiplicacion de vn character con otro, que character redundara, y esto consideraras desta manera: miraras que numeros tienen encima de si los characteres q̃ quieres multiplicar vno por otro, y sumaras los dichos numeros, y veras en que character esta la suma, y en esto sabras q̃ character resultara dela multiplicaciō delos dos characteres: como si quisiesses multiplicar el ce. con el r. encima del ce. estan. 2. y encima del r. estan. 5. ayunta estos numeros y hazen. 7. mira despues encima de qual character estan los. 7. y veras que encima del. rr. diras pues que multiplicādo el ce. con r. resultara. rr. y queriendo multiplicar el cu. con el. n. (pues que no tiene sino el cu. 3. y el. n. no tiene nada) seran los mismos. 3. y por esso resultara cu. y si quieres multiplicar algun character por si mismo, no haras otra cosa que doblar el numero que tiene encima, y ve-

KK 2 ras

Table 2

RECORDS OF EQUATIONS

1. Diophantus of Alexandria (*3rd century* CE)

$x^3 = 2 - x$	Kᵘᾱ ἴσ M̊β̄ ⋔ ςᾱ
$8x^3 - 16x^2 = x^3$	Kᵘη̄ ⋔ Δᵘις̄ ἴσ Kᵘᾱ

2. Luca Pacioli (*ca. 1445–ca. 1559*)

$x^2 + x = 12$	1.ce.p̃.1.co.e q̃ le a 12.

3. Nicolas Chuquet (*d. 1500*)

$\sqrt{3x^4 - 24} = 8$	R̷ 2. 3⁴.m̃.24 est egale a 8

4. Michael Stifel (*1486–1567*)

$116 + \sqrt{41472} - 18x - \sqrt{648x} = 0$	$116 + \sqrt{_3}41472 - 18\tau - \sqrt{_3}648\tau$ aequantur 0

5. Girolamo Cardano (*1501–1576*)

$x^3 = 15x + 4$	1.*cu.aequalis*15.*rebus* p̃.4.

6. Rafael Bombelli (*ca. 1526–1573*)

$x^6 - 10x^3 + 16 = 0$	1.6̮ m.10 3̮ p̃.16 eguale a 0

7. François Viète (*1540–1603*)

$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$	$1C - 8Q + 16N$ aequ. 40
$x^3 + 3bx = 2c$	*Acubus + Bplano3inA aequari Zsolido2*

8. Thomas Harriot (*1560–1621*)

$a^3 - 3ab^2 = 2c^3$	$aaa - 3bba = 2ccc$

9. Albert Girard (*1595–1632*)

$x^3 = 13x + 12$	1③ × 13① + 12

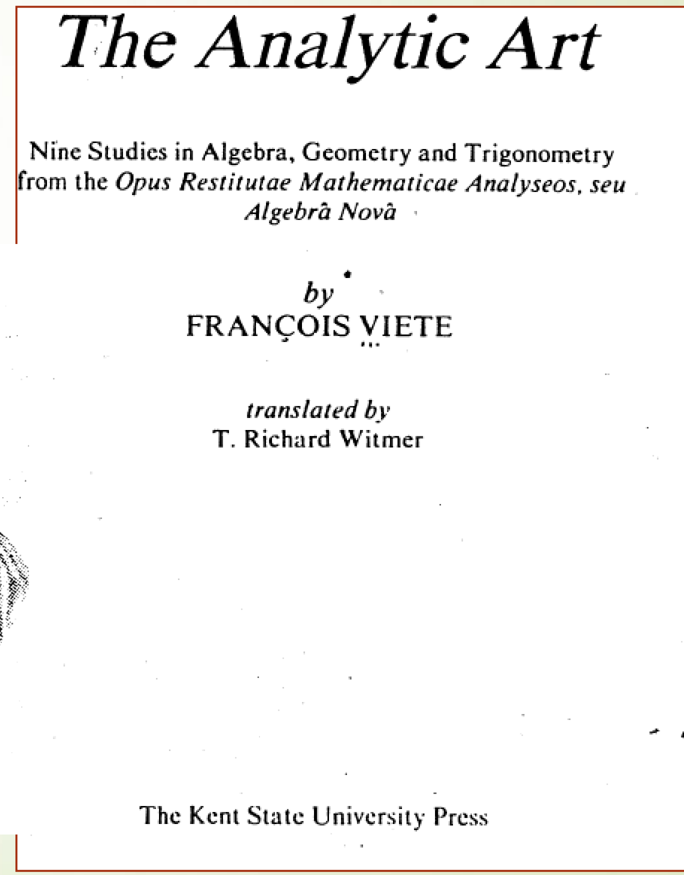
10. René Descartes (*1596–1650*)

$x^3 + px + q = 0$	$x^3 + px + q \propto 0$

5. Siglo XVII: Viète, Girard, Herigone y Descartes.

François Viète (1540-1603): *In Artem Analyticen Isagoge* (1591)


IN ARTEM ANALYTICEN ISAGOGE


The Analytic Art

Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the *Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebrâ Novâ*

by
FRANÇOIS VIETE

translated by
T. Richard Witmer

The Kent State University Press

5. Siglo XVII: François Viète

Physical Sciences | Professor Jeffrey Oaks

François Viète's revolution in algebra

François Viète is considered by many historians to be the founder of modern algebra, but his work has not received the academic attention it deserves. Professor Jeffrey Oaks from the University of Indianapolis seeks to redress this imbalance. Through his study of Medieval and Renaissance mathematics, Professor Oaks shows how Viète reestablished algebra on a geometrical foundation; and in the process created an entirely new notation. His work inspired Fermat's and Descartes' developments and led to algebra becoming the language of science.

The word algebra derives from the Arabic al-jabr, which means restoration, or the reunion of broken parts. Algebra can be traced back to ninth century CE Arabic books on the topic, and prior to that, we find that it was practised in India, Greece, and even ancient Babylonia.

Algebra before 1500, whether in Arabic, Latin, or Italian, was used predominantly for numerical problem-solving by practitioners such as merchants, government secretaries and surveyors. Only a few mathematicians employed it for more 'scientific' exploits, such as Diophantus in the 3rd century CE, Omar Khayyam in the 11th century, and Jordanus de Nemore in the 13th century.

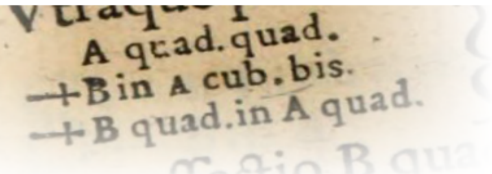
Algebra began to attract the attention of theoretically-minded mathematicians in sixteenth-century Italy. Mathematicians such as Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano and Rafael Bombelli had finally solved irreducible cubic and quartic equations, and in the process, they had begun to explore negative and complex numbers.

FRANÇOIS VIÈTE

François Viète (1540 -1603), a French lawyer in the court of Henry IV, took algebra in a completely different direction from his predecessors. Beginning in 1591, he published a series of short treatises in which his algebraic knowns and unknowns, which he calls 'magnitudes', possess dimension without limit, and, for the first time, arbitrary knowns are represented in notation. It is mainly because of his notational innovations that he has been credited by some historians as being the founder of modern algebra.

A MISUNDERSTOOD MATHEMATICIAN

Despite Viète's importance, and partly due to his own terse and sometimes confusing style, his work has been misunderstood and has not received the serious attention it warrants. For starters, just what are these capital letters he employs in his new algebra? Jeffrey Oaks, Professor of Mathematics at the University of Indianapolis, however, is redressing this. Nearly two decades ago he decided to combine his two main interests, Mathematics and History, in the study of Medieval Arabic mathematics. Professor Oaks enlisted the help of a Palestinian colleague to teach him Arabic and embarked on the study of Arabic algebra. His early work exposed the conceptual differences between medieval and modern algebra, and those studies laid the foundation for his later work on Viète.



A geometric polynomial from Viète's *De Recognitione Aequationum* (1615), which can be translated into our notation as $A^4+2B\cdot A^3+B^2\cdot A^2$. Among other differences, note the prepositions "in" for multiplication, and the lack of the coefficient "1" before the "A quad. quad."

PREMODERN POLYNOMIALS

Oaks discovered that algebraists before Viète conceived of the objects of their study, that is monomials, polynomials, and equations, differently than we do today. A premodern polynomial was considered to be a collection of different kinds of numbers or powers, without any operations present. Where our $x^2 + 3x$, for example, is constructed from the operations of exponentiation, scalar multiplication, and addition, the medieval equivalent 'a māl and three things' (here translated from Arabic) was simply a collection of four items of two kinds, like saying 'an apple and three bananas'. This interpretation lay behind the algebra in Ancient Greek, medieval Arabic, Latin, and Italian, and even in the algebra of sixteenth-century Europe.

A NEW ALGEBRA FOR GEOMETRY

Prior to Viète, the knowns and unknowns in algebra were positive numbers. Viète diverged from this norm, but in a way that had not been properly analysed before. Professor Oaks has reviewed the whole of Viète's output, along with an extensive range of mathematical literature from the period, and has determined that Viète's letters, standing for his knowns and unknowns, represent instead geometric magnitudes such as lines and surfaces. More specifically, they represent the *relative sizes* that geometric magnitudes have with respect to one another, without any regard to possible numerical measures. In other words, Viète created an algebra for classical geometry.

What drove Viète was his interest in producing accurate astronomical tables. He was faithful to the Greek tradition exemplified in Ptolemy's *Almagest* (2nd century CE) by regarding geometry as providing the theoretical footing for calculations in astronomy. (Even if magnitudes have no intrinsic numerical measure, one can assign numerical measures to them.) Ptolemy had not used algebra to express his theorems or to perform his calculations, but Viète, through his investigations in trigonometry, found a way to adapt the numerical algebra of his time to a geometrical setting. By working abstractly with higher-dimensional magnitudes and by resolving proportions into equations, he laid the foundation for a new algebra. This new algebra, which he called *logistice speciosa*, wasn't just another step towards modern algebra. It was a complete overhaul of the very foundation of the art. It inspired Fermat's and Descartes' developments, which ultimately led to the replacement of Euclidean geometry with algebra as the standard way to express scientific results.

Viète was also the first mathematician to explore beyond the third dimension in geometry.

A RADICALLY NEW CONCEPT OF POLYNOMIAL, AND A NEW NOTATION TO GO WITH IT

One natural consequence of the shift from an arithmetical to a geometrical foundation is that Viète's polynomials were understood in an entirely new way. Where premodern polynomials were simply aggregations of the powers, Viète's polynomials are modern in the sense that they are now constructed from

Portrait of Viète from Savérien's 1773 *Histoire des Philosophes*.

operations. Before Viète, the powers of the unknown in algebra were considered to be different types of numbers and were given individual names. For instance, in 1575, Xylander called the first-degree unknown "numerus" and the second degree unknown "quadratum", which he abbreviated as "N" and "Q". In one problem, for example, he wrote "$1Q+6N+36$" for what would be our $x^2+6x+36$. While Xylander's notation may look modern, the letters function differently than our powers of x. The "Q" is a denomination or type (like "euro"), and only with a coefficient (here a "1") does it assume a value (like "1 euro"). This is how all the various algebras preceding Viète functioned, both rhetorically and in notation.

The notation of Viète's *logistice speciosa* performs differently from its premodern counterpart. Viète expressed Xylander's polynomial as "A quadratum, + B in A, + B quadrato", or translated into English,

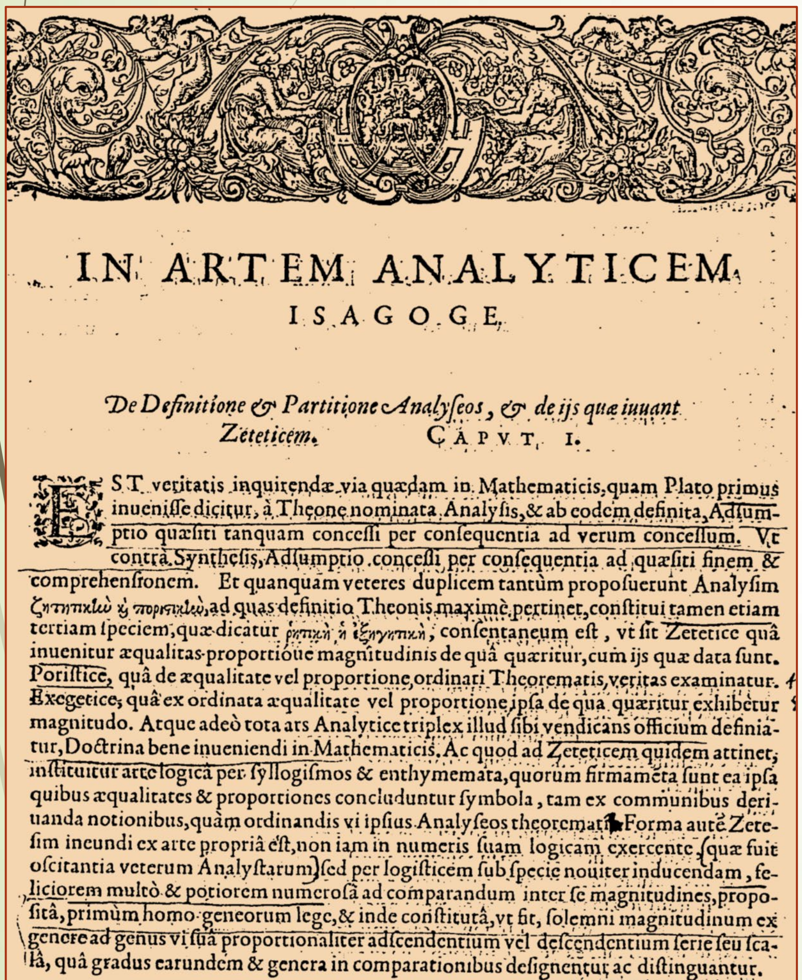
5. Siglo XVII: El álgebra "nueva" de François Viète (1540-1603)

Un paso decisivo para el desarrollo de este proceso de algebrización fue la publicación, en 1591, de *In Artem Analyticen lsagoge. Seorsim excussa ab opere restituta mathematica analyseos, seu, algebrâ novâ* (1591) de François Viète (1540-1603).

Viète utilizó símbolos para representar no solo las incógnitas, sino también las cantidades conocidas. Introdujo la "logística especiosa", un método de cálculo con "especies" (tipos o clases de elementos), de tal manera que los símbolos de su "arte analítico" (o álgebra) podían usarse para representar no sólo números, sino también valores de cualquier magnitud, ya sea longitud, superficie, volumen o ángulo.

Además, Viète concibió un nuevo método algebraico de análisis que facilitó resolver problemas de cualquier naturaleza, ya fuese numérica o geométrica, y su nuevo lenguaje simbólico fue la herramienta para desarrollar su programa.

5. Siglo XVII: *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de Viète



IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE.

De Definitione & Partitione Analyseos, & de ijs quæ iuuant Zeteticem. CAPVT. I.

EST veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus inuenisse dicitur, à Theone nominata Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Vt contrà Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem & comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantùm proposuerunt Analysim ζητητικὴν καὶ ποριστικὴν, ad quas definitio Theonis maximè pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quæ dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ, consentaneum est, vt sit Zetetice quâ inuenitur æqualitas proportioue magnitudinis de quâ quæritur, cum ijs quæ data sunt. Poristice, quâ de æqualitate vel proportione ordinati Theorematis, veritas examinatur. Exegetice, quâ ex ordinata æqualitate vel proportione ipsa de qua quæritur exhibetur magnitudo. Atque adeò tota ars Analytice triplex illud sibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inueniendi in Mathematicis. Ac quod ad Zeteticem quidem attinet, instituitur arte logicâ per syllogismos & enthymemata, quorum firmamēta sunt ea ipsa quibus æqualitates & proportiones concluduntur symbola, tam ex communibus deriuanda notionibus, quàm ordinandis vi ipsius Analyseos theorematis. Forma autē Zetesim incundi ex arte propriâ est, non iam in numeris suam logicam exercente, (quæ fuit oscitantia veterum Analystarum) sed per logisticem sub specie nouiter inducendam, feliciorem multò & potiorem numerosâ ad comparandum inter se magnitudines, propositâ, primùm homogeneorum lege, & inde constitutâ, vt fit, solemni magnitudinum ex genere ad genus vi suâ proportionaliter adscendentium vel descendentium serie seu scalâ, quâ gradus earundem & genera in comparationibus designentur ac distinguantur.

En el capítulo 1, Viète, para explicar que se entiende por análisis, comienza afirmando:
“ Hay una vía de búsqueda de la verdad en Matemáticas, que se dice descubierta por Platón, llamada Análisis por Teón, y se define por asumir el problema solucionado y aquello que buscamos como si fuese ya admitido y trabajar a través de sus consecuencias hacia aquello que es reconocido como verdadero” (Viète, 1591, 4r).

5. Siglo XVII: *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de Viète

IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE.

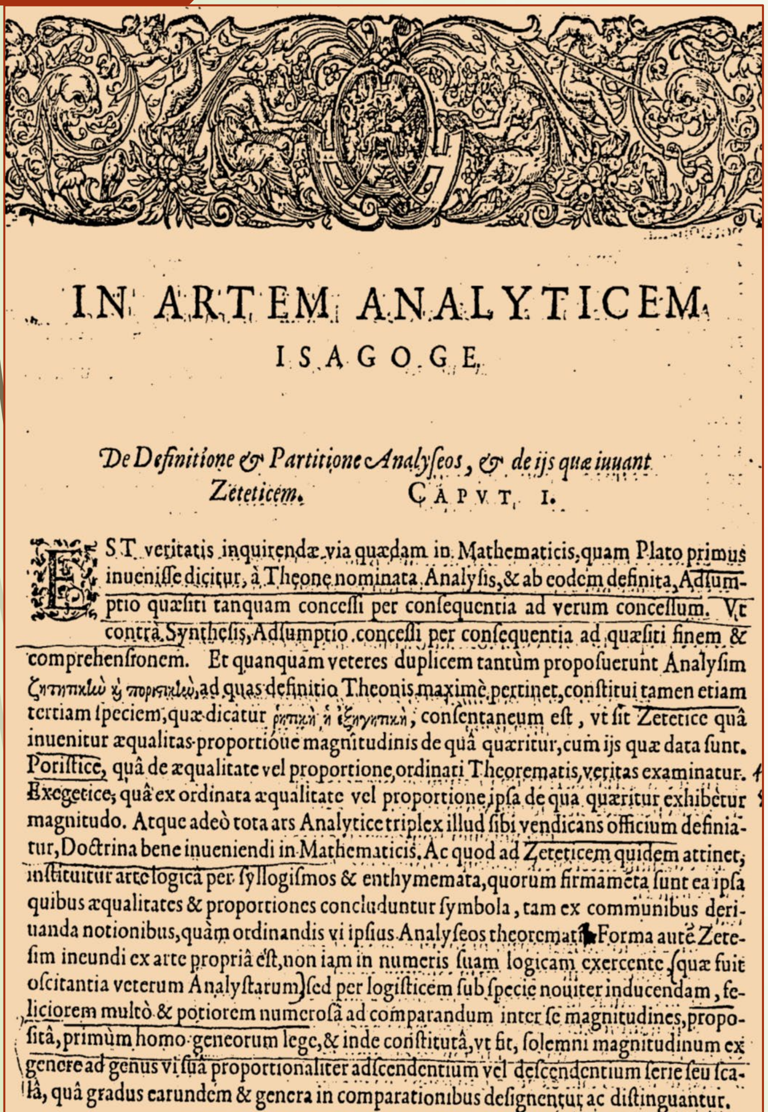
De Definitione & Partitione Analyseos, & de ijs quæ iuuant Zeteticem. CAPVT. I.

EST veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus inuenisse dicitur, à Theone nominata Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Vt contrà Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem & comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantùm proposuerunt Analysim ζητητικὴν καὶ ποριστικὴν, ad quas definitio Theonis maximè pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quæ dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ, consentaneum est, vt sit Zetetice quâ inuenitur æqualitas proportioue magnitudinis de quâ quæritur, cum ijs quæ data sunt. Poristice, quâ de æqualitate vel proportione, ordinati Theorematis, veritas examinatur. Exegetice, quâ ex ordinata æqualitate vel proportione ipsa de qua quæritur exhibetur magnitudo. Atque adeò tota ars Analytice triplex illud sibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inueniendi in Mathematicis. Ac quod ad Zeteticem quidem attinet, instituitur arte logicâ per syllogismos & enthymemata, quorum firmamẽta sunt ea ipsa quibus æqualitates & proportiones concluduntur symbola, tam ex communibus deriuanda notionibus, quàm ordinandis vi ipsius Analyseos theorematis. Forma autẽ Zetesim incundi ex arte propriâ est, non iam in numeris suam logicam exercente (quæ fuit oscitantia veterum Analystarum) sed per logisticem sub specie nouiter inducendam, feliciorem multò & potiorem numerosâ ad comparandum inter se magnitudines, propositâ, primùm homogeneorum lege, & inde constitutâ, vt fit, solemni magnitudinum ex genere ad genus vi suâ proportionaliter adscendentium vel descendentium serie seu scalâ, quâ gradus earundem & genera in comparationibus designentur ac distinguantur.

En este capítulo 1 titulado *De Definitione & Partitione Analyseos, & de iis qua juvant Zeteticen*, que se puede traduir como "Sobre la definición y partes del análisis y sobre la utilidad de la zetètica", Viète divide este "arte (método) analítico" en tres procesos con nombres concretos: zetética, porística i exegética.

El primero, la zetética, consistia en transformar la información del problema en forma de igualdad (nosotros diríamos ecuación) representando las cantidades conocidas y las incógnitas con símbolos.

5. Siglo XVII. *In Artem Analyticen Isagoge* (1591)



IN ARTEM ANALYTICEM ISAGOGE.

De Definitione & Partitione Analyſeos, & de ijs quæ iuuant Zeteticem. CAPVT I.

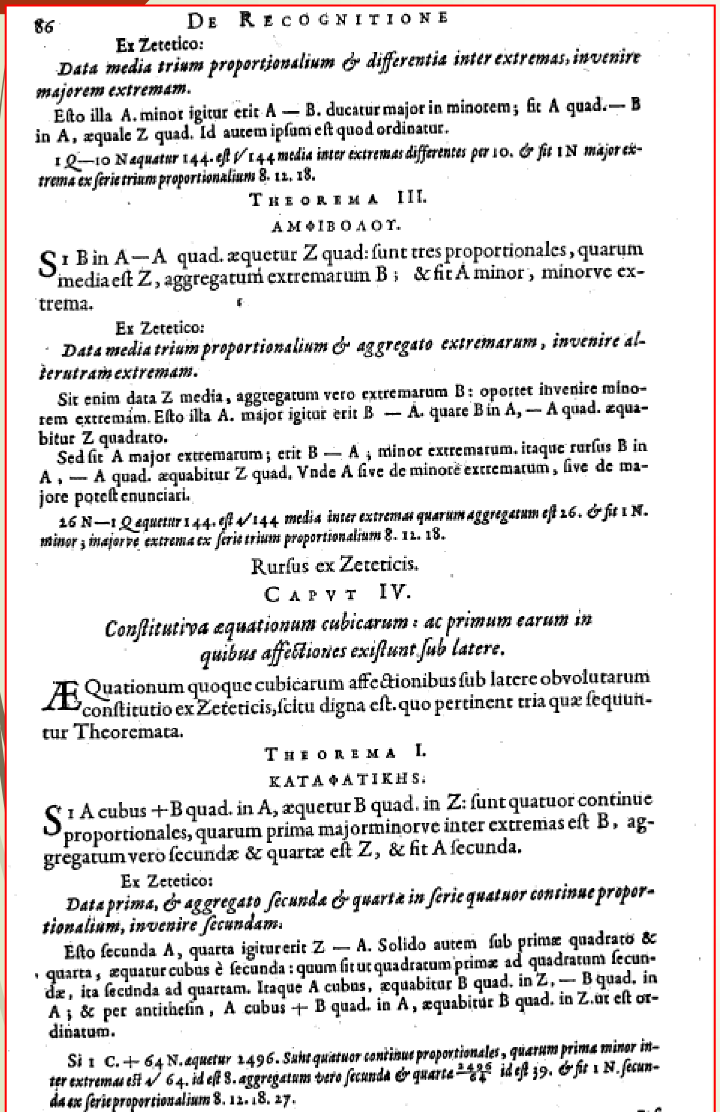
EST veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus inueniſſe dicitur, à Theone nominata Analyſis, & ab eodem definita, Adſumptio quæſiti tanquam conceſſi per conſequentia ad verum conceſſum. Vt contrà Syntheſis, Adſumptio conceſſi per conſequentia ad quæſiti finem & comprehenſionem. Et quanquam veteres duplicem tantùm propoſuerunt Analyſim ζητητικὴν καὶ ποριστικὴν, ad quas definitio Theonis maximè pertinet, conſtitui tamen etiam tertiam ſpeciem, quæ dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ, conſentaneum eſt, vt ſit Zetetice quâ inuenitur æqualitas proportióue magnitudinis de quâ quæritur, cum ijs quæ data ſunt. Poriſtice, quâ de æqualitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, quâ ex ordinata æqualitate vel proportione ipſa de qua quæritur exhibetur magnitudo. Atque adeò tota ars Analytice triplex illud ſibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inueniendi in Mathematicis. Ac quod ad Zeteticem quidem attinet, inſtituitur arte logicâ per ſyllogiſmos & enthymemata, quorum firmamēta ſunt ea ipſa quibus æqualitates & proportiones concluduntur ſymbola, tam ex communibus deriuanda notionibus, quàm ordinandis vi ipſius Analyſeos theorematis. Forma autē Zeteſim ineundi ex arte propriâ eſt, non iam in numeris ſuam logicam exercente (quæ fuit oſcitantia veterum Analyſtarum) ſed per logiſticem ſub ſpecie nouiter inducendam, feliciorem multò & potiorem numeroſâ ad comparandum inter ſe magnitudines, propoſitâ, primùm homogeneorum lege, & inde conſtitutâ, vt fit, ſolemni magnitudinum ex genere ad genus vi ſuâ proportionaliter adſcendentium vel deſcendentium ſerie ſeu ſcalâ, quâ gradus earundem & genera in comparationibus deſignentur ac diſtinguantur.

El segundo proceso, la porística, consistía en aplicar las diferentes reglas o teoremas ya conocidas a la igualdad planteada, para convertir-la en una ecuación en forma general o en una identidad.

Por último, el tercero y más importante de los procesos para Viète, la exegética, estudia la estructura de las ecuaciones planteadas para poder aislar la incógnita y encontrar la solución deseada.

Viète resumía su objetivo al final de su obra: “Finalmente, el arte analítico, dotado de sus tres formas zetética, porística y exegética, reclama para él mismo la solución del problema más grande de todos que es SOLUCIONAR TODOS LOS PROBLEMAS.” (Viète, 1591, 4r)

5. Siglo XVII. *In Artem Analyticen Isagoge* (1591)



Ex Zetetico:

Data media trium proportionalium & differentia inter extremas, invenire majorem extremam.

Eſto illa A. minor igitur erit A — B. ducatur major in minorem; fit A quad. — B in A, æquale Z quad. Id autem ipſum eſt quod ordinatur.

1 Q — 10 N æquatur 144. eſt √ 144 media inter extremas differentes per 10. & fit 1 N major extrema ex ſerie trium proportionalium 8. 12. 18.

THEOREMA III.

ΑΜΦΙΒΟΛΟΥ.

SI B in A — A quad. æquetur Z quad: ſunt tres proportionales, quarum media eſt Z, aggregatum extremarum B; & fit A minor, minorve extrema.

Ex Zetetico:

Data media trium proportionalium & aggregato extremarum, invenire alterutram extremam.

Sit enim data Z media, aggregatum vero extremarum B: oportet invenire minorem extremam. Eſto illa A. major igitur erit B — A. quare B in A, — A quad. æquabitur Z quadrato.

Sed ſit A major extremarum; erit B — A; minor extremarum. itaque rurſus B in A, — A quad. æquabitur Z quad. Vnde A ſive de minore extremarum, ſive de majore poteſt enunciari.

26 N — 1 Q æquetur 144. eſt √ 144 media inter extremas quarum aggregatum eſt 26. & fit 1 N. minor; majorve extrema ex ſerie trium proportionalium 8. 12. 18.

Rurſus ex Zeteticis.

CAPVT IV.

Conſtitutiva æquationum cubicarum: ac primum earum in quibus affectiones exiſtunt ſub latere.

ÆQuationum quoque cubicarum affectionibus ſub latere obvolutarum conſtitutio ex Zeteticis, ſcitu digna eſt. quo pertinent tria quæ ſequuntur Theoremata.

THEOREMA I.

ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΗΣ.

SI A cubus + B quad. in A, æquetur B quad. in Z: ſunt quatuor continue proportionales, quarum prima major minorve inter extremas eſt B, aggregatum vero ſecundæ & quartæ eſt Z, & fit A ſecunda.

Ex Zetetico:

Data prima, & aggregato ſecundæ & quartæ in ſerie quatuor continue proportionalium, invenire ſecundam.

Eſto ſecunda A, quarta igitur erit Z — A. Solido autem ſub primæ quadrato & quarta, æquatur cubus è ſecunda: quum ſit ut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ita ſecunda ad quartam. Itaque A cubus, æquabitur B quad. in Z, — B quad. in A; & per antitheſin, A cubus + B quad. in A, æquabitur B quad. in Z. ut eſt ordinatum.

Si 1 C. + 64 N. æquetur 1496. Sunt quatuor continue proportionales, quarum prima minor inter extremas eſt √ 64. id eſt 8. aggregatum vero ſecundæ & quartæ $\frac{1496}{64}$ id eſt 39. & fit 1 N. ſecunda ex ſerie proportionalium 8. 12. 18. 27.

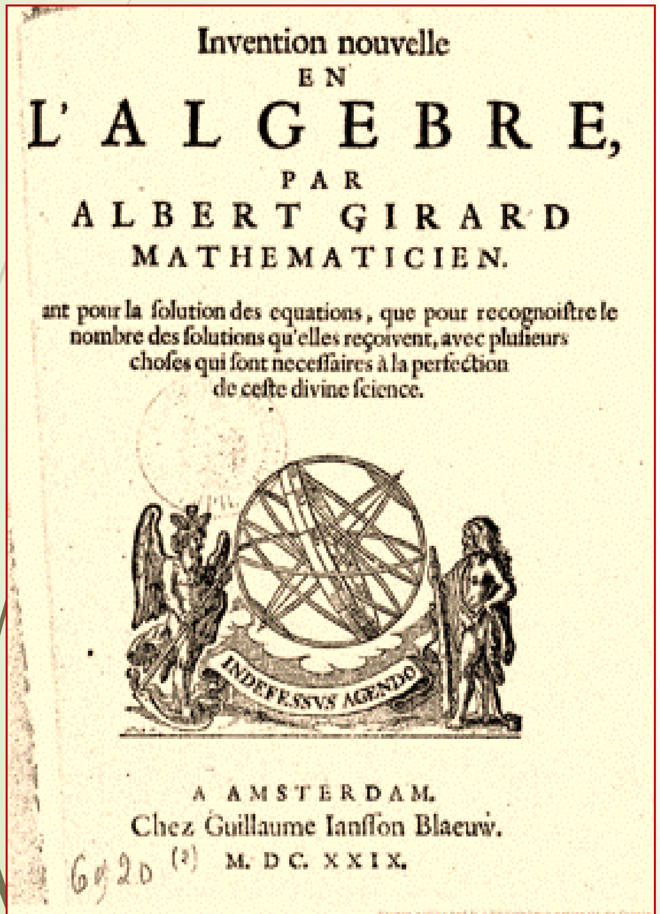
Et ſi

- Viète utilizaba las vocales para representar las incógnitas y las consonantes para las cantidades conocidas.
- Con Viète las expresiones algebraicas empiezan a ser modernas, en el sentido que el rigor y la generalidad de como son usades son similares a las actuales, aunque utiliza una simbología primitiva, sin signo de igualdad, sin exponentes, ni signos radicales.

5. Siglo XVII. Viète y la algebrización

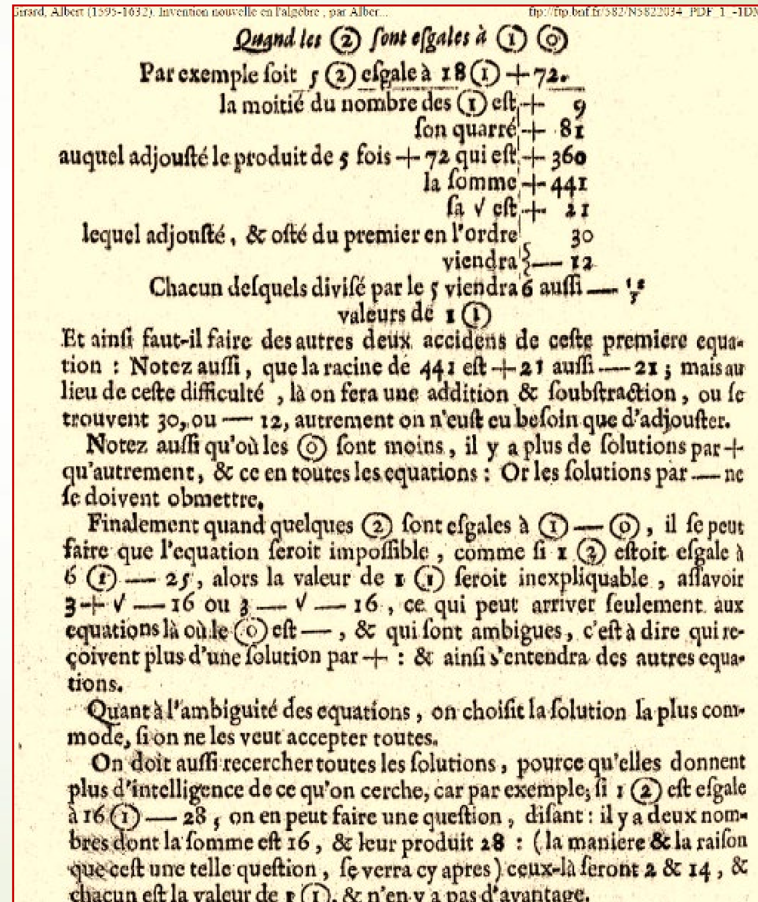
- Así, una de les características importantes de la obra de Viète es que identificó las ecuaciones algebraicas con las proporciones mediante el producto de medios y extremos de una proporción.
- Utilizó la teoría de proporciones de Euclides para resolver las ecuaciones introduciendo un nuevo camino para solucionarlas.
- Viète introdujo el álgebra "nueva", utilizando la que él llamó "logística especiosa", o sea, cálculos con "especies", en contraste con la "logística numerosa", o sea, cálculos con números que ya se desarrollaba en las álgebras renacentistas anteriores.
- La obra de Viète tuvo una gran difusión y a lo largo del siglo XVII, un buen número de matemáticos comenzaron a darse cuenta que los procedimientos algebraicos eran una herramienta muy útil para resolver problemas geométricos.

5. Siglo XVII. Albert Girard (1595-1632). *Invention nouvelle en l'Algèbre* (1629)



Invention nouvelle
EN
L'ALGEBRE,
PAR
ALBERT GIRARD
MATHEMATICIEN.
ant pour la ſolution des equations, que pour recognoiſtre le nombre des ſolutions qu'elles reçoivent, avec pluſieurs choſes qui ſont neceſſaires à la perfection de ceſte divine ſcience.

A AMSTERDAM.
Chez Guillaume Ianſſon Blaeuw.
M. DC. XXIX.



Quand les 2 ſont eſgales à 1 0

Par exemple ſoit 5 2 eſgale à 18 1 + 72.
la moitié du nombre des 1 eſt + 9
ſon quarré + 81
auquel adjouſté le produit de 5 fois + 72 qui eſt + 360
la ſomme + 441
ſa √ eſt + 21
lequel adjouſté, & oſté du premier en l'ordre viendra { 30, — 12
Chacun deſquels diviſé par le 5 viendra 6 auſſi — 12/5 valeurs de 1 1

Et ainſi faut-il faire des autres deux accidens de ceſte premiere equation : Notez auſſi, que la racine de 441 eſt + 21 auſſi — 21 ; mais au lieu de ceſte difficulté , là on fera une addition & ſoubſtraction, ou ſe trouvent 30, ou — 12, autrement on n'euſt eu beſoin que d'adjouſter.

Notez auſſi qu'où les 0 ſont moins, il y a plus de ſolutions par + qu'autrement, & ce en toutes les equations : Or les ſolutions par — ne ſe doivent obmettre.

Finalement quand quelques 2 ſont eſgales à 1 — 0, il ſe peut faire que l'equation ſeroit impoſſible, comme ſi 1 2 eſtoit eſgale à 6 1 — 25, alors la valeur de 1 1 ſeroit inexpliquable, aſſavoir 3 + √ — 16 ou 3 — √ — 16, ce qui peut arriver ſeulement aux equations là où le 0 eſt —, & qui ſont ambigues, c'eſt à dire qui reçoivent plus d'une ſolution par + : & ainſi s'entendra des autres equations.

Quant à l'ambiguité des equations, on choiſit la ſolution la plus commode, ſi on ne les veut accepter toutes.

On doit auſſi recercher toutes les ſolutions, pource qu'elles donnent plus d'intelligence de ce qu'on cerche, car par exemple, ſi 1 2 eſt eſgale à 16 1 — 28, on en peut faire une queſtion, diſant : il y a deux nombres dont la ſomme eſt 16, & leur produit 28 : (la maniere & la raiſon que ceſt une telle queſtion, ſe verra cy apres) ceux-là ſeront 2 & 14, & chacun eſt la valeur de 1 1, & n'en y a pas d'avantage.

5. Siglo XVII. Viète, Isagoge (1591), trad. Fr. Vaulezard 1630

INTRODVCTION EN L'ART ANALYTIC, ou nouuelle Algebre.

De la definition & diuiſion de l'Analytique, & des choſes aydans au Zetetique.

CHAPITRE I.

Il y a vne voye aux Mathematiques [a] *pour enquerir & rechercher la verité, laquelle eſt dite auoir eſté premierement trouuée par Platon, & par Theon appellée* [b] *Analyſe; & d'icelles definies* [c] *l'Aſſumption du requis comme concedé, par les conſequences au vray concedé. Comme au contraire* [d] *le Sintheſe, l'Aſſumption du concedé par les conſequences tirées de la fin & comprehenſion du requis. Et bien que les anciens ayent ſeulement proposé deux*

B

eſpeces d'Analytique, ſçauoir ζητητικὴν καὶ ποριστικήν, *auſquelles conuient tres bien la deffinition de Theon, j'en ay toutesfois conſtitué vne troiſieſme eſpece conuenable à icelles; laquelle ſera dite* ῥητικὴ ἢ ἐξηγητική, *comme eſtant le Zetetique, celuy par lequel eſt trouuée l'egalité ou proportion de la grandeur requiſe, auec celles qui ſont données. Le Poriſtique, par lequel eſt enquis de la verité du Theoreme ordonné, par l'egalité ou proportiõ l'Exegetique, par lequel eſt exibée la meſme grandeur dont eſt queſtion, par l'egalité ou proportion ordonnée. Et ainſi tout l'art Analytique s'atribuant ce triple office ſera defini, la doctrine de bien trouuer aux Mathematiques. Et certes auſſi le Zetetique a cela de propre, qu'il eſt inſtitué ſelon les preceptes de la Logique, par ſylogiſmes & Enthymemes, deſquels les fondemens ſont tant les meſmes que ceux par leſquels* [f] *au ſymbole ſont conclues les egalitez & proportiõs que ceux qui doiuent eſtre tirez des communes notions* [g] *la forme de commencer le Zetetique eſt*

5. Siglo XVII. Pierre Hérigone *Cursus Mathematicus* (1634,1637,1642)

CVRSVS
MATHEMATICVS,
NOVA, BREVI, ET CLARA METHODO
DEMONSTRATVS,
Per NOTAS reales & vniuersales, citra vsum
cuiuscunque idiomatis intellectu faciles.
n° 7°
COVRS
MATHEMATIQVE,
DEMONSTRE' D'VNE NOVVELLE,
BRIEFVE, ET CLAIRE METHODE,
Par NOTES *reelles & vniuerselles, qui peuuent estre*
entenduës facilement sans l'vsage d'aucune langue.
Par PIERRE HERIGONE, Mathematicien.

A PARIS, M.DC.XXXIV.
Chez l'Autheur, en l'Isle du Palais, à l'enseigne
de l'Anguille, &
Chez HENRY LE GRAS, au troisiesme pilier
de la grande Salle du Palais.
Auec Priuilege du Roy.

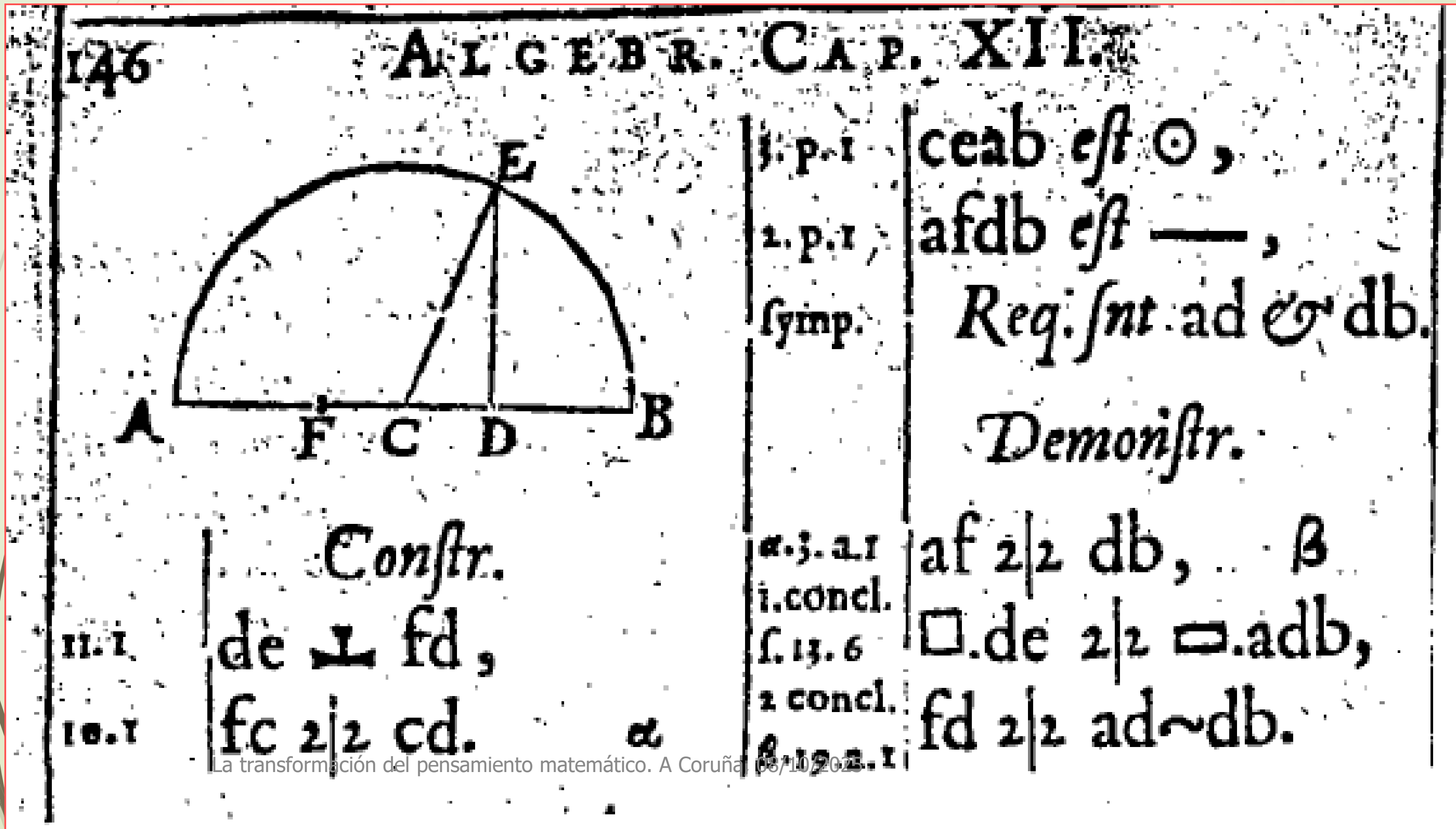
AD LECTOREM.

legitimarũ, necessariarum que consecutionum immediatarum, singulis lineolis comprensarum aptè cohæret: quarum vnaquæque nullo negotio in syllogismum potest conuerti, quòd in propositione citata, & in ea quæ citationi respondet, omnes syllogismi partes reperiãtur: vt videre est in prima libri primi demonstratione, quæ in syllogismos est conuersa. Præterea distinctio propositionis in sua membra, scilicet in hypothesin, explicationem quæsiti, constructionem, vel præparationem, & demonstrationem non parum iuuat quoque memoriam, & ad intelligendam demonstrationem multùm prodest. Atque hæc sunt commoda, quæ in hac noua methodo demonstrandi reperiuntur. Quid autem in singulis huius Cursus partibus præstiterim, iudicabunt studiosi, quibus opto hunc meum laborem vtilem esse. Vale.

trouuent toutes les parties du syllogisme: comme on peut voir en la premiere demonstration du premier liure, qui a esté reduicte en syllogismes. La distinction de la proposition en ses membres, sçauoir en l'hypothese, l'explication du requis, la construction, ou preparation, & la demonstration, soulage aussi la memoire, & sert grandement à l'intelligence de la demonstration. Voila les principales commoditez qui se trouuent en nostre nouuelle methode de demonstrer. Ceux qui aiment ces diuines sciences iugeront ce que i'ay apporté du mien en chacune partie de ce Cours, que ie souhaite qu'il leur soit vtile & profitable. Adieu.

5. Siglo XVII. El álgebra de Viète fue la guia para resolver ecuaciones en la aritmética, en la geometría, en la trigonometría,...

Pierre Hérigone. *Cursus Mathematicus* (1634)


146 ALGEBR. CAP. XII.

Constr.

11.1 de ⊥ fd,

10.1 fc 2|2 cd. α

3.p.1 ceab est ⊙,

2.p.1 afdb est —,

symp. *Req. sunt* ad & db.

Demonstr.

α.3.a.1 af 2|2 db, β

1.concl. □.de 2|2 ▭.adb,

s.13.6

2.concl. fd 2|2 ad~db.

β.12.a.1

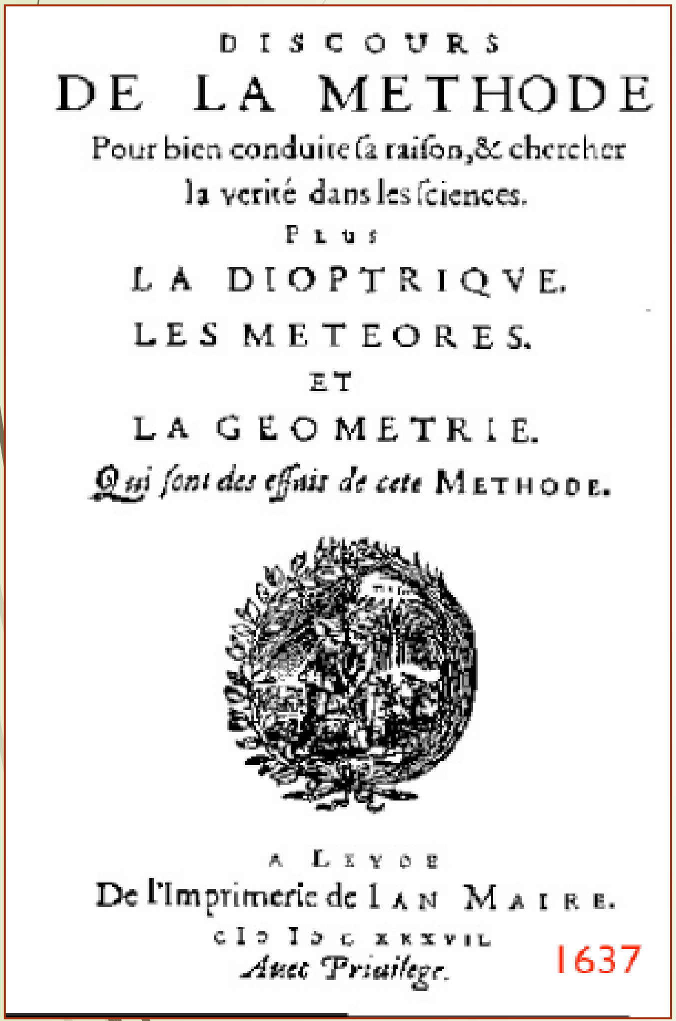
5. Siglo XVII. Álgebra como análisis en la obra de Hérigone

- La doctrine analytique, ou l' Algèbre est l'art de trouver la grandeur inconnue, en la prenant comme si elle soit connue,& trouvant l'égalité entre icelle & les grandeurs données. Elle se distingue en la vulgaire & en la spécieuse. L'Algèbre vulgaire ou nombreuse est celle qui se pratique par nombres. L'Algèbre spécieuse est celle qui exerce sa logique par les espèces ou formes des choses désignées par lettres de l'alphabet.
- L'Algèbre vulgaire sert seulement à trouver les solutions des problèmes Arithmétiques sans démonstrations. Mais l'Algèbre Spécieuse n'est pas limitée par aucun genre de problème, & n'est pas moins utile à inventer toutes sortes de théorèmes, qu'à trouver les solutions & démonstrations des problèmes. (Hérigone, 1634, 1)

5. Siglo XVII. René Descartes (1596-1650) *La Géométrie* (1637)

- Uno de los puntos fundamentales para la evolución del álgebra, fue la edición de la obra de René Descartes (1596-1650) titulada *La Géométrie* (1637) que apareció como un apéndice del *Discours de la Méthode*.

5. Siglo XVII. René Descartes (1596-1650)
La Géométrie (1637)

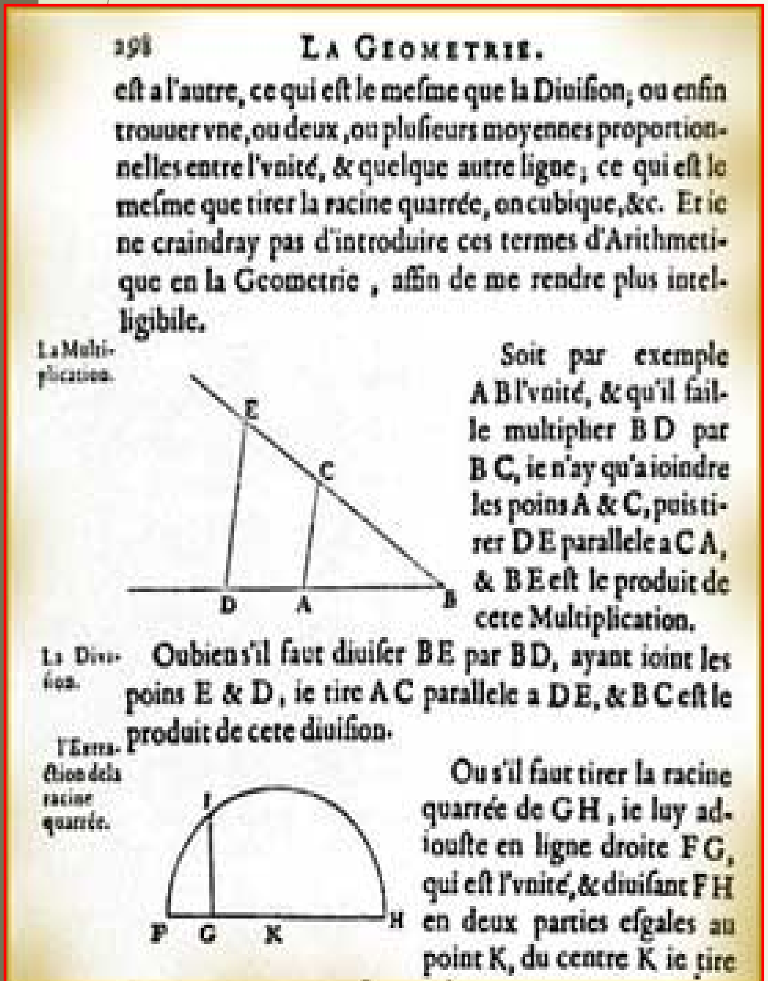

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Privilege.
1637

- *La Géométrie* (1637) está dividida en tres libros:
- el primero titulado "sobre los problemas de construcción que requiriesen solo líneas rectas y círculos”
- el segundo titulado "sobre la naturaleza de las líneas curvas"
- y el tercero titulado "sobre la construcción de los problemas que son sólidos o quasisólidos".

5. Siglo XVII. *La Géométrie* (1637)

- Este trabajo de Descartes supuso un punto de partida para contemplar la geometría desde otra perspectiva.
- Además, contiene la notación actual con dos variantes menores: escribe xx, aa,… en lugar de x^2, a^2,… Y no utiliza nuestro signo de igualdad.
- Aunque se haya acabado imponiendo esta notación, durante los 50 o 60 años posteriores las diferentes obres de álgebra adoptaron notaciones diversas.

5. Siglo XVII. Descartes: *La Géométrie* (1637)


298 LA GEOMETRIE.

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC est le produit de cete diuision.

l'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire

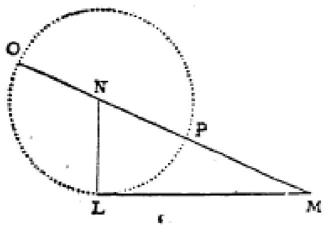
- Descartes comenzaba el libro I construyendo una álgebra de segmentos: se mostraba como sumar, multiplicar, dividir y sacar la raíz cuadrada de segmentos haciendo construcciones geométricas.
- A continuación hacía las construcciones geométricas de las soluciones de los problemas planos y se explicaba como construir la solución en una ecuación de segundo grado.

5. Siglo XVII. Descartes: *La Géométrie* (1637)

Com-
ment ils
ſe reſol-
uent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$$z^2 \infty\ az + bb$$



ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \infty\ \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Que ſi iay $yy \infty -ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \infty -ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

LA GÉOMÉTRIE (1637)

"Y entonces esta raíz o línea desconocida se encuentra fàcilmente. Pues si tengo por ejemplo

$$z^2 \infty\ az + bb$$

construyo el triangulo rectángulo NLM, donde el lado LM es igual a "*b*", raíz cuadrada de la cantidad conocida "*bb*", y el otro (lado) LN es "*½ a*", la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por "*z*" que se supone ser la línea desconocida, ya que prolongando MN, base de este triangulo, hasta O, de manera que NO sea igual a NL, la línea total OM es la línea buscada.

Y ella se expresa de esta manera

- $z \infty\ 1/2\ a + (\ 1/4\ aa + bb)^{1/2}$"

5. Siglo XVII. *La Géométrie* (1637, 372-373)

Combien il peut y auoir de racines en chaſq; Equatiõ.

Scachés donc qu'en chaſque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimenſions, autant peut il y auoir de diuerſes racines, c'eſt a dire de valeurs de cete quantité. car par exemple ſi on ſuppoſe x eſgale a 2; oubien $x - 2$ eſgal a rien; & derechef $x \propto 3$; oubien $x - 3 \propto 0$; en multipliant ces deux equatiòns $x - 2 \propto 0$, & $x - 3 \propto 0$, l'vne par l'autre, on aura $xx - 5x + 6 \propto 0$, oubien $xx \propto 5x - 6$, qui eſt vne Equation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout enſemble vaut 3. Que ſi derechef on fait $x - 4 \propto 0$, & qu'on multiplie cete ſomme par $xx - 5x + 6 \propto 0$, on aura $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$, qui eſt vne autre Equation en laquelle x ayant trois dimenſions a auſſy trois valeurs, qui ſont 2, 3, & 4.

Quelles ſont les fauſſes racines.

Mais ſouuent il arriue, que quelques vnes de ces racines ſont fauſſes, ou moindres que rien. comme ſi on ſuppoſe que x deſigne auſſy le defaut d'vne quantité, qui ſoit 5, on a $x + 5 \propto 0$, qui eſtant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$$

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a ſçauoir trois vrayes qui ſont 2, 3, 4, & vne fauſſe qui eſt 5.

Cõment on peut diminuer le nombre des dimenſions d'vne Equation lorſqu'on connoiſt quelqu'vne de ſes racines.

Et on voit euidemment de cecy, que la ſomme d'vne equation, qui contient pluſieurs racines, peut touſiours eſtre diuiſée par vn binóme compoſé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'vne des vrayes racines, laquelle que ce ſoit; ou plus la valeur de l'vne des fauſſés. Au moyen de quoy on diminue d'autant ſes dimenſions.

Et reciproquement que ſi la ſomme d'vne equation ne

Cõment on peut examiner ſi quelque quantité donnée eſt la valeur d'vne racine.

ne peut eſtre diuiſée par vn binóme compoſé de la quantité inconnue + ou - quelque autre quantité, cela teſmoigne que cete autre quantité n'eſt la valeur d'aucune de ſes racines. Comme cete derniere

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$$

peut bien eſtre diuiſée, par $x - 2$, & par $x - 3$, & par $x - 4$, & par $x + 5$; mais non point par x + ou - aucune autre quantité. ce qui monſtre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chaſque Equatiõ.

On connoiſt auſſy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fauſſes en chaſque Equation. A ſçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les ſignes + & - s'y trouuent de fois eſtre changés; & autant de fauſſes qu'il s'y trouue de fois deux ſignes +, ou deux ſignes - qui s'entreſuiuent. Comme en la derniere, a cauſe qu'aprés $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui eſt vn changement du ſigne + en -, & aprés $-19xx$ il y a $+106x$, & aprés $+106x$ il y a -120 qui ſont encore deux autres changemens, on connoiſt qu'il y a trois vrayes racines; & vne fauſſe, a cauſe que les deux ſignes -, de $4x^3$, & $19xx$, s'entreſuiuent.

Cõment on fait que les fauſſes racines d'vne Equation deuienẽt vrayes, & les vrayes fauſſes.

De plus il eſt ayſé de faire en vne meſme Equation, que toutes les racines qui eſtoient fauſſes deuienent vrayes, & par meſme moyen que toutes celles qui eſtoiẽt vrayes deuienent fauſſes: a ſçauoir en changeant tous les ſignes + ou - qui ſont en la ſeconde, en la quatrieſme, en la ſixieſme, ou autres places qui ſe deſignent par les nombres pairs, ſans changer ceux de la premiere, de la troiſieſme, de la cinquieſme & ſemblables qui ſe deſignent par les nombres impairs.

6. Reflexiones finales

- A finales del siglo XVII, el lenguaje y procedimientos algebraicos fueron adquiriendo una posición hegemónica dentro de las matemáticas que ya no perdieron posteriormente.
- Ha sido sugerido que este hecho habría sido consecuencia de los desarrollos paralelos y complementarios de la mecánica racional y del cálculo infinitesimal.
- Uno de los puntos cruciales fue el uso de la álgebra "nueva", con un nuevo lenguaje simbólico, no solo como medio de expresión sino como una herramienta analítica. Es decir, se operaba y se construían nuevos "objetos" algebraicos que permitían encontrar nuevos resultados, como cuadraturas, máximos, series o fórmulas.

6. Reflexiones finales

- El lenguaje simbólico en el modo algebraico de pensamiento de finales del siglo XVII reúne tres características principales (Mahoney, 1980):

- 1) Utiliza un simbolismo operativo: con este simbolismo no solamente podemos abreviar palabras, sino que también podemos hacer operaciones y crear nuevos objetos combinándolos.
- 2)Trabaja cada vez más con relaciones matemáticas, más que con objectos (clasificación de los objetos).
- 3) Está libre de las relaciones intuitivas con el mundo físico.

6. Reflexiones finales

- Gracias a la circulación de las obras de François Viète (1540-1603), de Pierre de Fermat (1601-1665) y, sobre todo, a *La Géométrie* (1637) de René Descartes (1596-1650), el lenguaje simbólico y los procedimientos analítico-algebraicos se aplicaron a diferentes campos y se extendió el proceso de algebrización.
- El establecimiento del método analítico y del lenguaje simbólico como lenguaje formal de las matemáticas, dio lugar a la generación de nuevos resultados y procedimientos en matemáticas.
- Dichos procedimientos usaban un lenguaje nuevo de símbolos y técnicas. No se trataba solo de una notación, sino de una herramienta esencial que provocó la transformación de un pensamiento casi exclusivamente geométrico a uno cada vez más algebraico, lo que permitió diversas aproximaciones y métodos para afrontar un mismo problema (había debates).

6. Reflexiones finales

- También se empezó a normalizar el uso del infinito, ya sea sumando series infinitas o tratando infinitesimales (cantidades muy pequeñas), característica esencial en algunas obras del siglo XVII y XVIII.

- En concreto, varios autores del siglo XVII, como John Wallis (1616–1703), el italiano Pietro Mengoli (1625-1686) o Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), empezaron a usar estos procedimientos algebraicos para resolver problemas de cuadraturas, en particular, la cuadratura del círculo.

FO. u.

FO. a. *FO. r.*

FO. a^2. *FO. ar.* *FO.* r^2.

FO. a^3. *FO.* a^2r. *FO.* ar^2. *FO.* r^3.

Fig. 1 *Tabula Formosa* (Mengoli 1659)

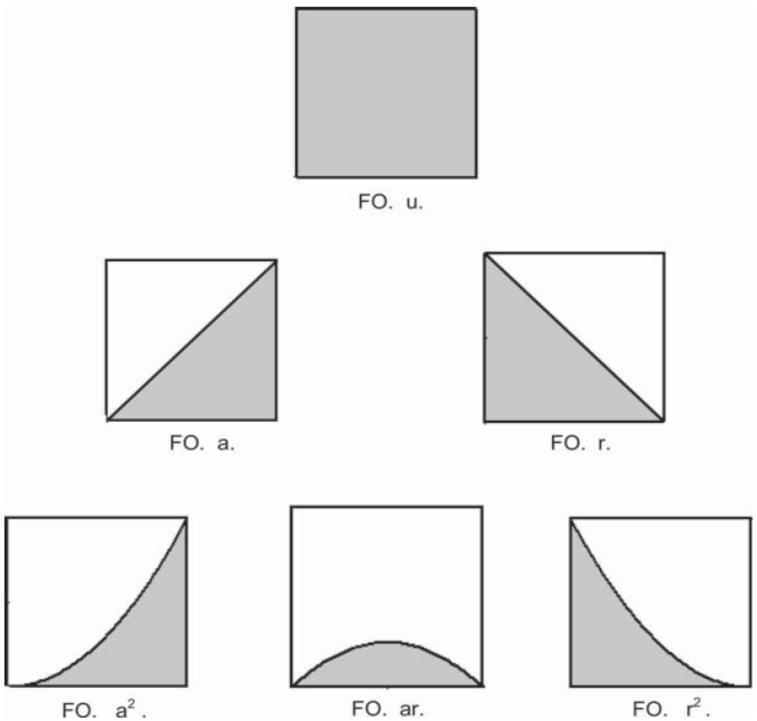


Fig. 2 The authors' sketches of geometric figures

Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works 33

$$\int_0^1 1\,dx$$

$$\int_0^1 x\,dx \qquad \int_0^1 (1-x)\,dx$$

$$\int_0^1 x^2dx \qquad \int_0^1 x(1-x)\,dx \qquad \int_0^1 (1-x)^2\,dx$$

$$\int_0^1 x^3dx \quad \int_0^1 x^2(1-x)\,dx \quad \int_0^1 x(1-x)^2\,dx \quad \int_0^1 (1-x)^3\,dx$$

$$\int_0^1 x^4dx \quad \int_0^1 x^3(1-x)\,dx \quad \int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx \quad \int_0^1 x(1-x)^3\,dx \quad \int_0^1 (1-x)^4\,dx$$

Fig. 6 *Tabula Formosa* in modern notation

$$\mathrm{B}(1,1)$$

$$\mathrm{B}(2,1) \qquad \mathrm{B}(1,2)$$

$$\mathrm{B}(3,1) \quad \mathrm{B}(2,2) \quad \mathrm{B}(1,3)$$

$$\mathrm{B}(4,1) \quad \mathrm{B}(3,2) \quad \mathrm{B}(2,3) \quad \mathrm{B}(1,4)$$

$$\mathrm{B}(5,1) \quad \mathrm{B}(4,2) \quad \mathrm{B}(3,3) \quad \mathrm{B}(2,4) \quad \mathrm{B}(1,5)$$

1

1/2* 1/2

1/3 1/6 1/3

1/4 1/12 1/12 1/5

1/5 1/20 1/30 1/20 1/5

Fig. 5 Harmonic triangle (Mengoli 1672). *Mengoli wrote 1(2) to express 1/2, 1(3) to express 1/3 and so on

MUCHAS GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN

MOLTES GRÀCIES PER LA VOSTRA ATENCIÓ

7. Algunas referencias

- BOS, Henk J. M., *Redefining geometrical exactness. Descartes' Transformation of Early Modern Concept of Construction*, New York/ Berlin/ Heidelberg, Springer-Verlag, 2001.
- CRIPPA, Davide, *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century. A debate Among Gregory, Huygens and Leibniz*. Frontiers in the History of Science, Birkhäuser, 2015.
- EROLES, A.; MASSA-ESTEVE, M. R. y BLANCO, M, "Fonts Vietianes a l'*Arithmetica Universal* (1669) de Josep Saragossà", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, Vol. XVII, 2019, 1-38.
- GIUSTI, Enrico, "Algebra and Geometry in Bombelli and Viète", *Bollettino di Storia delle scienze matematiche*, 12, 1992, 303-28.
- GÓMEZ-GARCÍA, F.; Herrero-Piñeyro, P. J.; Linero-Bas, A.; Massa-Esteve, M. R. ;Mellado-Romero, A. 2021. «The six books of Diophantus' Arithmetic increased and reduced to specious: the lost manuscript of Jacques Ozanam (1640–1718)", *Archive for History of Exact Sciences* 75: 557–611.
- HEEFFER, Albrecht, "From the second unknown to the symbolic equation" a Heeffer, A. i Van Dyck, M. (ed.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics* , vol. 26, Studies in Logic, 57-101, College Publications, 2010.
- HØYRUP, Jens, "Hesitating progress –the slow development toward algebraic symbolization in abacus- and related manuscripts, c. 1300 to c. 1550", a Heeffer, A. i Van Dyck, M. (ed.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics* , vol. 26, Studies in Logic, 3-56, College Publications, 2010.

7. Algunas referencias

KNOBLOCH, Eberhard, ‘Leibniz and the infinite’, *Quaderns d’Història de l’Enginyeria*, V. XVI, 2018, 11-32.

- MAHONEY, Michael S.,"The beginnings of algebraical thought in the seventeenth century", *Descartes' philosophy, mathematics and physics*, Gaukroger, S., ed., Totowa/ Brighton, Barnes and Noble/ Harvester, 1980, 141-156.
- MANCOSU, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, 1996.
- MASSA-ESTEVE, Mª Rosa, “ Algebra and Geometry in Pietro Mengoli (1625-1686), *Historia Mathematica* , 33, 2006, 82-112.
- MASSA-ESTEVE, Mª Rosa, “Symbolic language in the Early Modern Mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone (1580-1643)”, *Historia Mathematica*, 35, 2008, 285-301.
- MASSA-ESTEVE, Mª Rosa-DELSHAMS, Amadeu, “Euler’s Beta integral in Pietro Mengoli’s Works”, *Archive for History of Exact Sciences,* 63, n.3, 2009, 325-356.

7. Algunas referencias

- MASSA-ESTEVE, M. Rosa, "The symbolic treatment of Euclid's *Elements* in Hérigone's Cursus Mathematicus (1634, 1637, 1642)", Heeffer & Van Dyck (eds.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics*, 26 , College Publications, 165-191, 2010.
- MASSA-ESTEVE, M. Rosa, "The Role of Symbolic Language in the Transformation of Mathematics", *Philosophica*, 87, 153-193, 2012.
- MASSA-ESTEVE, M. Rosa, "The Harmonic triangle in Mengoli's and Leibniz's Works", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* Vol. XVI, 2018, 233-258.
- MELLADO ROMERO, A., *La influencia del Cursus Mathematicus de Hérigone en la algebrización de las matemáticas*, Tesi Doctoral, Universidad de Murcia, 2022. http://hdl.handle.net/10201/123566
- OAKS, Jeffrey A., "François Viète's revolution in àlgebra", *Archive for History of Exact Sciences*, 72, 2018, 245-302.
- PANZA, M. "What more there is in early modern àlgebra than its literal formalism", Heeffer & Van Dyck (eds.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics*, 26 , College Publications, 193-228.

7. Algunas referencias

- PARSHALL, Karen Hunger, "A plurality of algebras, 1200–1600: Algebraic Europe from Fibonacci to Clavius", *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, Vol. 32 (1), 2017, 2-16.
- RABOUIN, David, "What Descartes knew of Mathematics in 1628", *Historia Mathematica* (37), 2010, 428-459.
- ROMERO VALLHONESTA, Fàtima, *L'àlgebra a la Península Ibèrica del segle XVI,* Tesi Doctoral, Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona, 2018. https://www.tesisenred.net/handle/10803/650339#page=1
- ROMMEVAUX, S; SPIESSER, M. I MASSA-ESTEVE, M. R. (coord.), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*. Honoré Champions Editeur, Paris, 2012.
- STEDALL, Jacqueline, *From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*. European Mathematical Society, 2011.
- VIETE, F., *Opera Mathematica* per Francisci A. Schooten, Georg Olms Verlag Hildesheim, New York, 1970, 1-41.
- WHITESIDE, D. T., "Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century", *Archive for History of Exact Sciences,* 1, 179-388.

1ª ESCUELA DE VERANO CEMAT EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS: ESTUDIO, APLICACIONES Y ENSEÑANZA

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL MENÉNDEZ Y PELAYO

Fundación Luis Seoane. A Coruña, del 8-10 Octubre 2025

La transformación del pensamiento matemático: de geométrico a algebraico

Mª Rosa Massa-Esteve

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

m.rosa.massa@upc.edu