

PROPUESTA PARA DESARROLLAR EN EL AULA

Algunos métodos de resolución numérica de ecuaciones del siglo XVI y su aplicación al aula

Antonio Linero Bas (Universidad de Murcia)
Antonio Mellado Romero (Universidad de Murcia)
(IES Licenciado Cascales, Murcia)

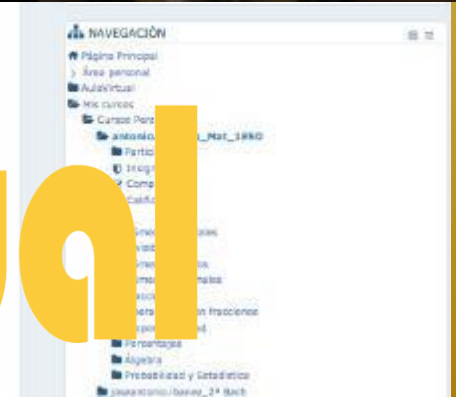
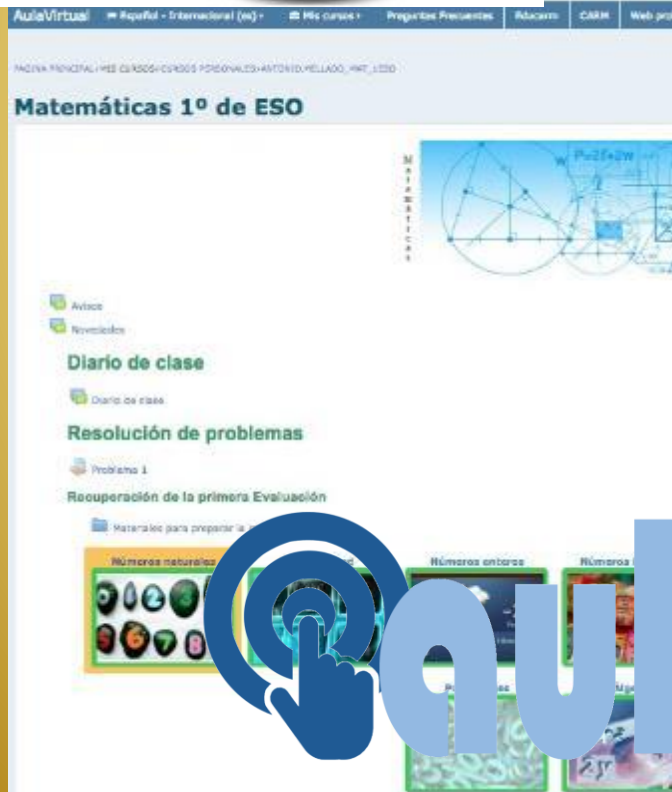
LA CORUÑA, 2025

IES Francisco Salzillo



Enseñanza

XXXI



Objetivo

Etapa Educativa: 1º de bachillerato de ciencias

Introducir en clase diferentes algoritmos de resolución numérica de ecuaciones e incidir en la importancia de la algebrización de las matemáticas.

Objetivo

Etapa Educativa: 1º de bachillerato de ciencias

Introducir en clase diferentes algoritmos de resolución numérica de ecuaciones e incidir en la importancia de la algebrización de las matemáticas.



Contextualización a través de la historia de las matemáticas

Objetivo

Etapa Educativa: 1º de bachillerato de ciencias

Introducir en clase diferentes algoritmos de resolución numérica de ecuaciones e incidir en la importancia de la algebrización de las matemáticas.



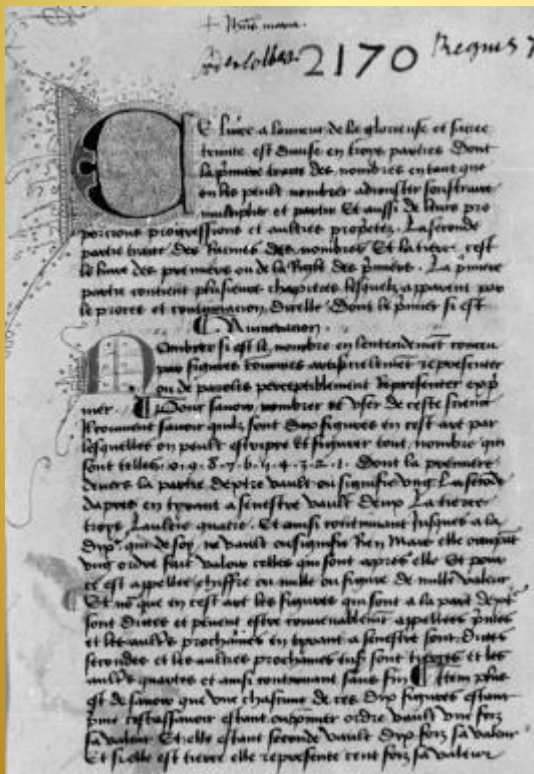
Contextualización a través de la historia de las matemáticas



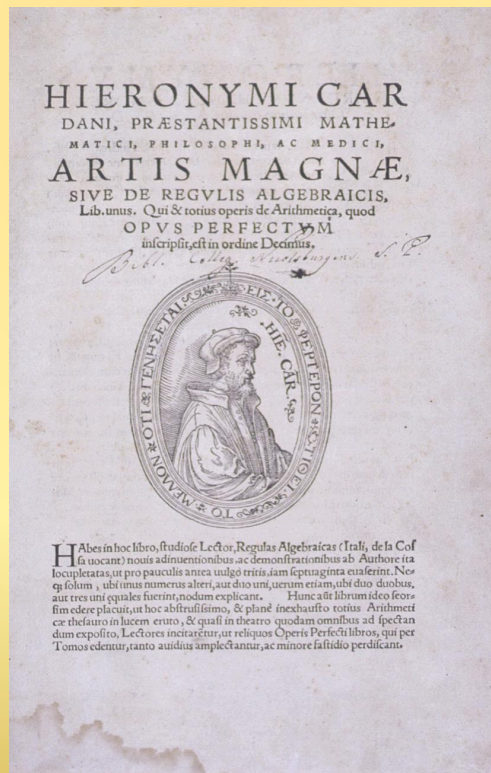
Incluyan el ordenador como herramienta en la mejora de los procesos de aprendizaje

Fuentes originales

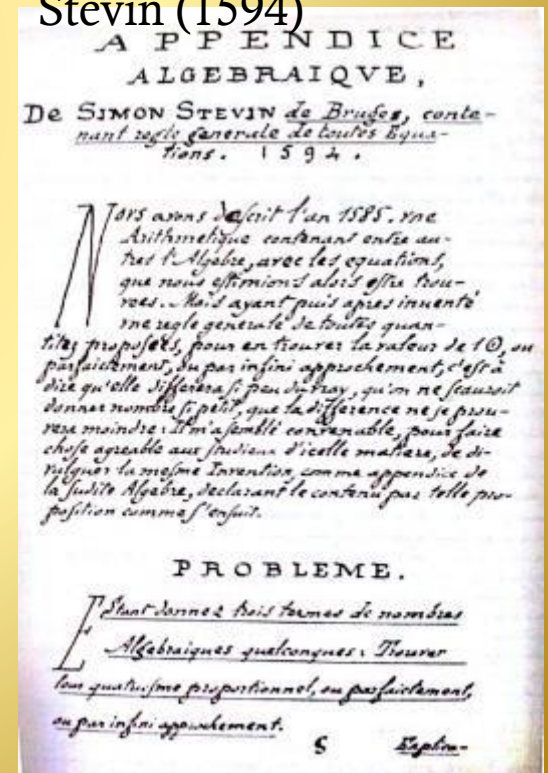
**Triparty en la science
des nombres,**
Nicolas Chuquet (1484)
L' arismethique
Étienne de la Roche
(1520)



**Artis magnae, sive de
regulis algebraicis, de**
Gerolamo Cardano
(1545)

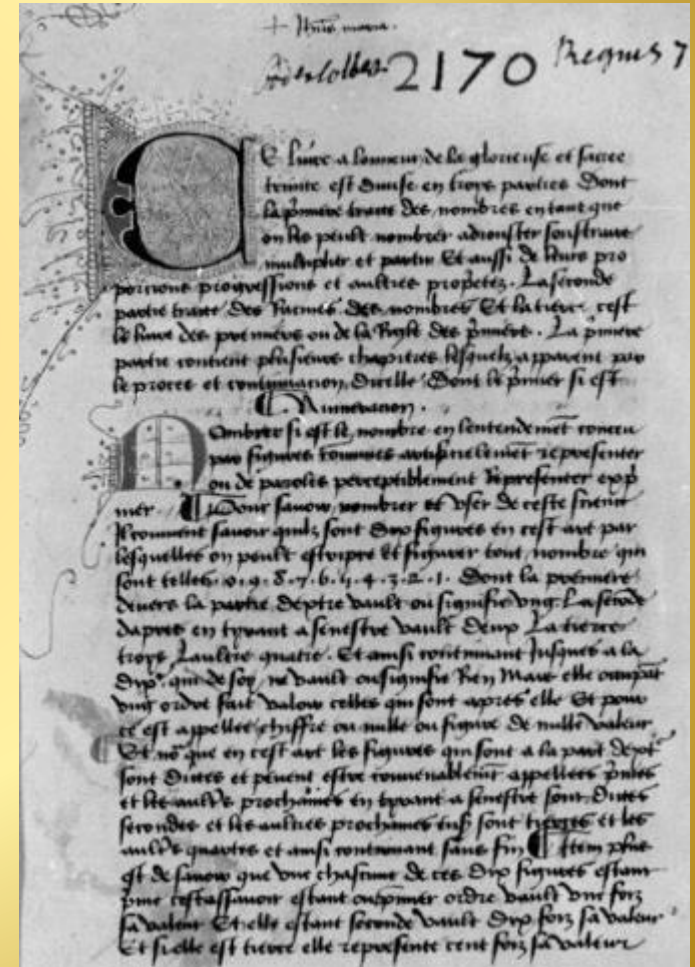


Appendice
Algébrique de Simon
Stevin, de Bruges,
contenant regle
générale de toutes
équations, Simon
Stevin (1594)



El triparty de Chuquet (1484)

- Triparty en la Science des Nombres (1484)
 - 1ª parte: una aritmética.
 - 2ª parte: raíces y números compuestos.
 - 3ª parte: álgebra.
- Estienne de La Roche (1470–1530)
 - L'arismetique nouvellement composée (1520)
 - Conocido y utilizado ampliamente en la primera mitad del siglo XVI.
- Aristide Marre, encuentra y publica una versión en francés del manuscrito de Chuquet (1880)



- Resolviendo la ecuación $x^2 + x = 39 \frac{13}{81}$

multiplier. 11. par. 2. qui est le nombre des trois multi-
phases et monies. 12. qui sont trois. Et se referent. 11.
Oce de. 4. 6. 8. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829

Ceste Risle soit at tousiours tant de nombres
 et moitens entre deux nombres prochains que
 son double. par la moitien Duelle se peuent trou-
 uer pluieurs nombres et faire n'ains calculer que par la
 Risle de trois ne par deux person ni par deux person ne
 se peuent trouuer. Et pour celle Risle entendre et sa-
 uoir position son doit sauoir que. 1. est le premier
 et le royaume entendent nombres sont. 2. Duelle sou-
 dent et faillent deux progressions naturelles dont l'un
 progresse d'ist en augmentation comme $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$
 et d'autre progresse d'ist 6. Diminuant comme $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$.
 1. et 2. Duelle risle entendent sens la Risle.

¶ N'importe par ouer n'importe se adouffent et denouent
ouer d'ouuer. C'est a entendre que quant entre deux
nombres entredeux l'on veut liquer le premier
moyen. On n'importe d'entier l'on dit adouffier 2 et
3 ainsi l'on ouer deux moies moies plus grand que le moie

[illegible]

trouuer. Il me remuunt posir deux nombres entiers prochains
dont l'un soit plus et l'autre moins. Comme .4. qui est
plus en son mouuent. 14. lesquels aduocistes auer. 4. font
36. qui font moins de 39. $\frac{11}{3}$. Et .6. qui multipliez en soy
et aduocistes auer. 6. font. 36. qui font plus de 39. $\frac{11}{3}$.
Ainsi s'appert que le nombre que se foist ass. mouer en de
4. et .6. Or se pour trouuer celui mouer. Je pene. 4
qui multipliez en soy et aduocistes auer. 4. et font moins
de 39. $\frac{11}{3}$. Et pouruient que j'ay moins le prochain par
la progression et augmentacion et pouruoir. 4. $\frac{11}{3}$. qui
multipliez en soy et aduocistes auer. 4. $\frac{11}{3}$. font encores moins
de ce que je demando. par quoy le prochain mouer
en augmentant et pouruoir. 4. $\frac{11}{3}$. lequel je multiplie
et aduociste comme. Dessus et trouue encores moins de 39.
 $\frac{11}{3}$. Et pouruient le prochain mouer. Dessus en pouruoir
7. $\frac{11}{3}$. Et pouruoir lequel je multiplie et aduociste et se
trouue plus de 39. $\frac{11}{3}$. Ainsi le nombre que se querre est
entre. 4. $\frac{11}{3}$ et 4. $\frac{11}{3}$. Et pouruoir lequel je multiplie
et aduociste auer. 4. et denouuer auer. 4. denouuer
Ainsi j'ay. 4. $\frac{11}{3}$. lesquels multipliez en soy et aduocistes
auer. 4. $\frac{11}{3}$. font mouer. 39. $\frac{11}{3}$. qui est ce que je deman
dois. Et ainsi se trouue la premiere partie de ce liure

4.	—	0
6.	—	0
4.	$\frac{1}{2}$	0
4.	$\frac{3}{4}$	0
4.	$\frac{1}{4}$	0
4.	$\frac{5}{8}$	0
4.	$\frac{7}{8}$	0

El método de Chuquet

- **Propiedad de los números intermedios**

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} < \frac{a_2}{b_2}$$

- **Resuelve la ecuación:**

$$x^2 + x = 39 \frac{13}{81}$$

El método de Chuquet

- **Resolviendo la ecuación** $x^2 + x = 39 \frac{13}{81}$

→ Denotamos $f(x) = x^2 + x$

1. Encontramos dos enteros positivos, uno menor que la solución y otro mayor.

- $a=5 <$ que la solución
- $b=6 >$ que la solución

2. Obtenemos $x_1 = \frac{a+b}{1+1} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$ [Prop. números intermedios]

3. Calculamos $f(x_1) = f(\frac{11}{2}) < 39 \frac{13}{81}$

→ La solución está entre $\frac{11}{2}$ y 6

→ Obtenemos x_2 por la propiedad de los números intermedios

$$x_2 = \frac{11+6}{2+1} = \frac{17}{3}$$



$$x_5 = \frac{52}{9}$$

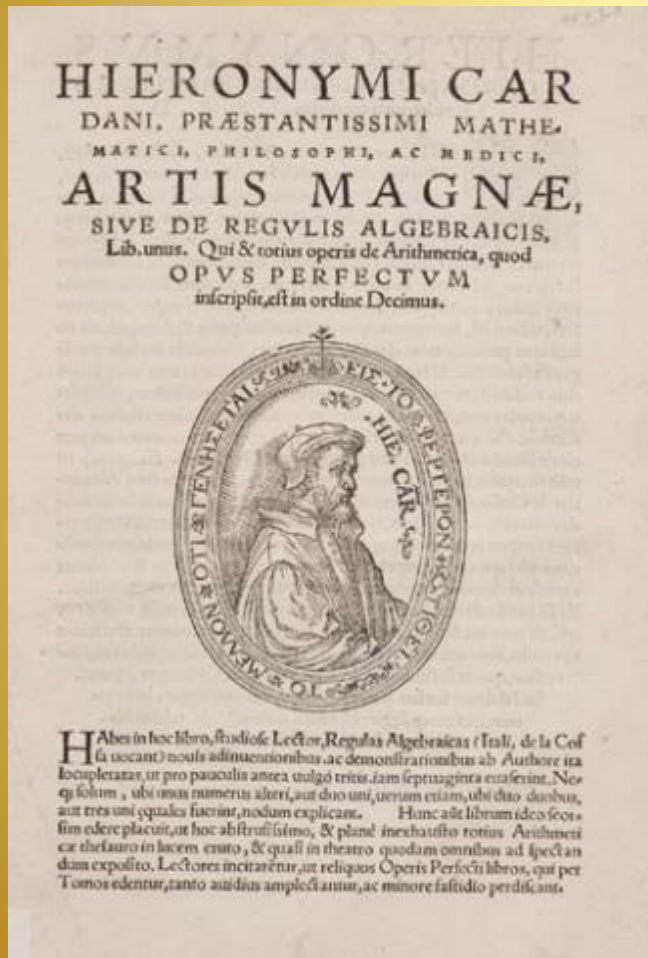
El Ars Magna de Cardano

Gerolamo Cardano (1501 - 1576)

- Practicó la medicina entre 1524 y 1550
- Practica Arithmetica (1539)
- Ars Magna (1545)
- Liber de Ludo Aleae (escrito a mitad del XVI)

El Ars Magna

- Su obra más influyente
- Compilación de las técnicas para la resolución de ecuaciones polinómicas
- Soluciones por radicales hasta el grado 4
- Capítulo XXX – Regula aurea



La Regula Aurea de Cardano

- Resolviendo la ecuación $x^4 + 3x^3 = 100$

Sit igitur primo, q̄d'q̄dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd si res est 2 q̄d'q̄dratum, & 3 cubi sunt 40, & si res est 3, erit q̄d'q̄dratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum est 2, & productum primum 40, & inuentum secundum 3, & productum secundum 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia secunda, & nota, quòd inuentum primum semper differt unitate ab inuen-

to secundo, aliter non recte es operatus, his cognitis, diuide 60 per 122, exit $\frac{30}{61}$, quod adde ad 2, primum inuentum, fit imperfecta æstimatione $2\frac{30}{61}$, hanc ducito ad q̄d'q̄dratum & tres cubos, fit 85 ferè, subtrahe igitur 85 productum æstimationis imperfectæ, à 162, producto secundo, habebis 77, subtrahe etiam $2\frac{30}{61}$, ex 3 inuenio secundo, relinquuntur $\frac{31}{61}$, duc in 62 differentiam secundam, fit $\frac{1922}{61}$, diuide per 77, exit $\frac{1922}{4697}$, detrahe ex 3 inuenio secundo, erit æstimatione satis

O pro

HIERONYMI CARDANI

proxima q̄d'q̄drati p: 3 cubis æqualium 100, hæc, $2\frac{2775}{4697}$, & si uelles, posses alternatis operationibus quantumlibet propius accedere.

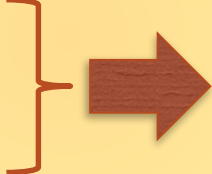
La Regula Aurea de Cardano

- **Resolviendo la ecuación** $x^4 + 3x^3 = 100$

➔ Denotamos $f(x) = x^4 + 3x^3$

1. Encontramos dos enteros positivos consecutivos, uno menor que la solución y otro mayor.

- $a = 2 \rightarrow f(2) = 40 < 100$
- $b = 3 \rightarrow f(3) = 162 > 100$


$$x^* = a + t \quad \text{con} \quad 0 < t < 1$$

La Regula Aurea de Cardano

- Resolviendo la ecuación $x^4 + 3x^3 = 100$

→ Denotamos $f(x) = x^4 + 3x^3$

1. La solución x^* está entre 2 y 3.



$$x^* = 2 + t \text{ con } 0 < t < 1$$

La Regula Aurea de Cardano

- **Resolviendo la ecuación** $x^4 + 3x^3 = 100$

→ Denotamos $f(x) = x^4 + 3x^3$

1. La solución x^* está entre 2 y 3.  $x^* = 2 + t$ con $0 < t < 1$

2. Obtenemos la primera aproximación, $2 < x_1 < 3$

$$\left. \begin{array}{ll} t = x^* - a & \text{produce} \quad f(x^*) - f(a) \\ b - a = 1 & \text{produce} \quad f(b) - f(a) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t \longrightarrow 100 - 40 \\ 1 \longrightarrow 162 - 40 \end{array} \right\}$$

$$t \approx \frac{100 - 40}{162 - 40} \rightarrow x^* = 2 + \frac{100 - 40}{162 - 40} = 2 + \frac{60}{122} \rightarrow x_1 = 2 \frac{30}{61}$$

La Regula Aurea de Cardano

- **Resolviendo la ecuación** $x^4 + 3x^3 = 100$

→ Denotamos $f(x) = x^4 + 3x^3$

1. La solución x^* está entre 2 y 3.  $x^* = 2 + t$ con $0 < t < 1$
2. Obtenemos la primera aproximación, $2 < x_1 < 3$  $x_1 = 2 \frac{30}{61}$
3. Obtenemos la segunda aproximación, x_2

La Regula Aurea de Cardano

- **Resolviendo la ecuación** $x^4 + 3x^3 = 100$

→ Denotamos $f(x) = x^4 + 3x^3$

1. La solución x^* está entre 2 y 3. → $x^* = 2 + t$ con $0 < t < 1$

2. Obtenemos la primera aproximación, $2 < x_1 < 3$ → $x_1 = 2 \frac{30}{61}$

3. Obtenemos la segunda aproximación, x_2

- $f(x_1) = f(2 \frac{30}{61}) = 84.968 \dots \approx 85 < 100 \rightarrow x^* \in (x_1, 3)$

$$x^* = x_1 + t \rightarrow \begin{cases} t = x^* - x_1 & \text{produce } f(x^*) - f(x_1) \\ 3 - x_1 & \text{produce } f(3) - f(x_1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} t \longrightarrow 100 - 85 \\ 3 - 2 \frac{30}{61} \longrightarrow 162 - 85 \end{array} \right\} \rightarrow t \approx \left(3 - 2 \frac{30}{61}\right) \cdot \frac{100 - 85}{162 - 85} \rightarrow x_2 = 2 \frac{2775}{4697}$$

La Regula Aurea de Cardano

- **Resolviendo la ecuación** $x^4 + 3x^3 = 100$

→ Denotamos $f(x) = x^4 + 3x^3$

1. La solución x^* está entre 2 y 3.  $x^* = 2 + t$ con $0 < t < 1$
2. Obtenemos la primera aproximación, $2 < x_1 < 3$  $x_1 = 2 \frac{30}{61}$
3. Obtenemos la segunda aproximación, x_2  $x_2 = 2 \frac{2775}{4697}$
4. Obtenemos las siguientes aproximaciones por un método recursivo.
5. Podemos obtener una fórmula general

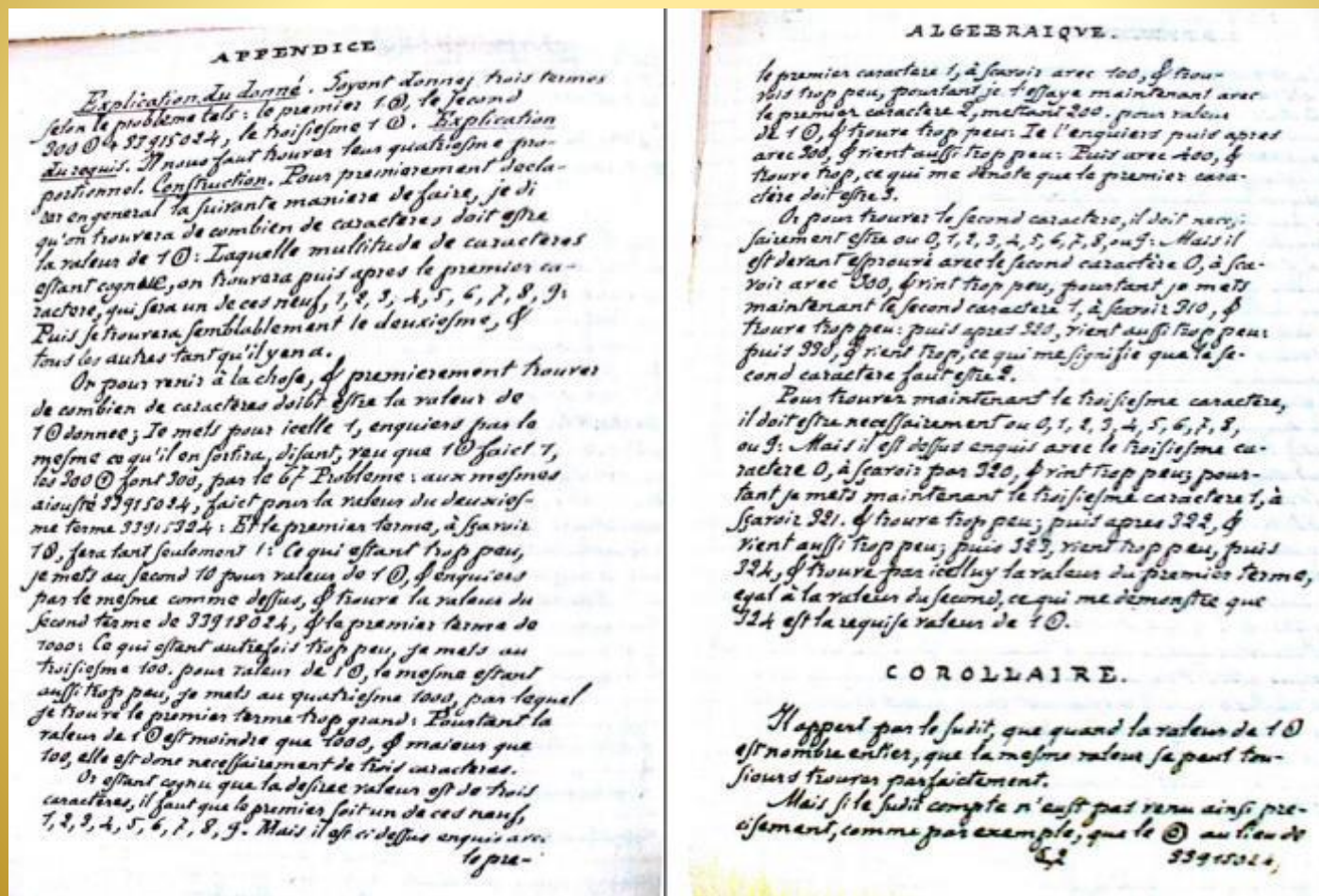
Si $f(x)=K$ es una ecuación con K racional positivo y f es un polinomio con todos sus coeficientes positivos. Si x^* es la solución de la ecuación y $p < x^* < q$,

$$x_n = p + (q - p) \cdot \frac{K - f(p)}{f(q) - f(p)}$$

- En 1585 publica un libro de aritmética y su trabajo sobre los números decimales (“De thiende” o “La disme”)
- En 1594 publica El “Apéndice algebraico” donde expone un método para la resolución numérica de ecuaciones.

El método de Stevin

- Resolviendo la ecuación $x^3 = 300x + 33\,915\,024$



El método de Stevin

- **Resolviendo la ecuación $x^3 = 300x + 33\,915\,024$**

→ Denotamos $f(x) = x^3 - 300x$

1. Encontramos el número de cifras de la solución

$$f(100) < 33\,915\,024 < f(1\,000) \rightarrow \text{La solución tiene 3 cifras}$$

1. Calculamos el valor de la primera cifra

$$f(300) < 33\,915\,024 < f(400) \rightarrow \text{La primera cifra es 3}$$

2. Calculamos el valor de la segunda cifra

$$f(320) < 33\,915\,024 < f(330) \rightarrow \text{La segunda cifra es 2}$$

1. Calculamos el valor de la tercera cifra

$$f(324) = 33\,915\,024 < f(325) \rightarrow \text{La tercera cifra es 4}$$

$$\mathbf{x = 324}$$

El método se puede aplicar para obtener aproximaciones a soluciones irracionales

Aplicación al aula

➔ Metodología

1. Contexto histórico.

- a. Presentamos al matemático.
- b. El libro donde se encuentra el método.
- c. Descripción del método.

2. Desarrollo de diferentes actividades escritas y con ordenador.

➔ Se ha elaborado un dossier que se entrega a los alumnos, donde se desarrolla la propuesta didáctica

Aplicación al aula

1. Actividades sobre la notación

Actividad:

- Encuentra en el texto original la expresión usada por cada matemático para escribir las ecuaciones estudiadas.
- ¿Cómo escribirían las siguientes ecuaciones?
 - $x^2 + 3x = 5 \Rightarrow$ Nicolás Chuquet
 - $2x^3 + x^2 \Rightarrow$ Gerolamo Cardano
 - $2x^4 = 3x^2 + x + 5 \Rightarrow$ Simon Stevin

ACTIVIDAD SOBRE NOTACIÓN	
1º CHUQUET "Encontrar un n° tal que multiplicado en si y a la multiplicación añadimos este n° resulta 39 $\frac{13}{21}$ " $x^2 + x = 39 \frac{13}{21}$	Escribe como cada matemático expresaría las siguientes ecuaciones $x^2 + 3x = 5$ Encontrar un n° tal que multiplicado entre si y a la multiplicación añadimos 3 veces ese número resulta 5.
2º CARDANO "Cubatum cubatum 8x 3 cuba, aequat 100" $x^4 + 8x^3 = 100$	$2x^3 + x^2 = 5$ 2 cuba & quadratum aequat 5
3º STEVIN "Primer término 1 (3) y el segundo 300 (1) + 33915024" $x^3 = 300x + 33915024$	$2x^4 = 3x^2 + x + 5$ Primer término 2 (4) y el segundo término 3 (2) + (1) + 5

Aplicación al aula

2. Actividades sobre resolución y comparación de métodos

Actividad:

Utiliza el método de Chuquet para obtener una aproximación a la solución de la ecuación

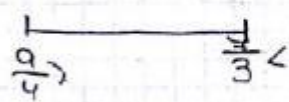
$$x^3 + 2x^2 + x = 25 \frac{2}{3}$$

Con un error menor de una centésima.

MÉTODO DE CHUQUET.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x$$
$$f(1) = 4 < \frac{44}{3}$$
$$f(2) = 18 < \frac{44}{3}$$
$$f(3) = 48 < \frac{44}{3}$$

Solución entre 2 y 3.

$$x_1 = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2}$$
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{245}{8} > \frac{44}{3}$$
$$\text{Error}_1 < \left| \frac{5}{2} - 2 \right| = 0.5$$
$$x_2 = \frac{2+5}{1+2} = \frac{7}{3}$$
$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{400}{27} > \frac{44}{3}$$
$$\text{Error}_2 < \left| \frac{7}{3} - 2 \right| = \frac{1}{3} = 0.33$$
$$x_3 = \frac{2+7}{1+3} = \frac{9}{4}$$
$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1521}{64} < \frac{44}{3}$$
$$\text{Error}_3 < \left| \frac{9}{4} - 2 \right| = 0.25$$


Aplicación al aula

2. Actividades sobre resolución y comparación de métodos

Actividad:

Cardano sólo obtuvo en su ejemplo dos aproximaciones a la solución de la ecuación

$$x^4 + 3x^3 = 100$$

Calcula otras dos más.

2 Método de Cardano

1.

$$f(x_2) = f\left(2 + \frac{2775}{4697}\right) = \left(2 + \frac{2775}{4697}\right)^4 + 3 \left(2 + \frac{2775}{4697}\right)^3 \approx 45 + 62 \approx 97 < 100. \text{ Entonces } x_2 \in (x_2, b)$$

$$t = x_0 - x_2 \text{ produce } 100 - 97 \Rightarrow \frac{t}{b - x_2} \approx \frac{100 - 97}{162 - 97} \Rightarrow t \approx (b - x_2) \cdot \frac{100 - 97}{162 - 97}$$

$$b - x_2 \text{ produce } 162 - 97$$

$$x_3 = x_2 + t = 2 + \frac{2775}{4697} + \left(3 - \left[2 + \frac{2775}{4697}\right]\right) \cdot \frac{100 - 97}{162 - 97} =$$

$$= 2 + \frac{2775}{4697} + (1 - 2 \cdot \frac{2775}{4697}) \cdot \frac{3}{65} = 2 + \frac{2775}{4697} + \frac{3}{65} - \frac{2775 \cdot 3}{4697 \cdot 65} =$$

$$= 2 + \frac{180375 + 9374 - 5550}{305305} = 2 + \frac{184219}{305305}$$

$$x_3 = 2 + \frac{184219}{305305} \quad \text{2,608362}$$

$$E_3 \leftarrow b - x_3 = 3 - 2 - \frac{2775}{4697} = 0,400 \dots$$

$$f(x_3) = f\left(2 + \frac{184219}{305305}\right) = \left(2 + \frac{184219}{305305}\right)^4 + 3 \left(2 + \frac{184219}{305305}\right)^3 \approx 46 + 53 \approx 99 < 100. \text{ Entonces } x_0 \in (x_3, b)$$

$$t = x_0 - x_3 \text{ produce } 100 - 99 \Rightarrow \frac{t}{b - x_3} \approx \frac{100 - 99}{162 - 99} \Rightarrow t \approx (b - x_3) \cdot \frac{100 - 99}{162 - 99}$$

$$b - x_3 \text{ produce } 162 - 99$$

$$x_4 = x_3 + t = 2 + \frac{184219}{305305} + \left(3 - \left[2 + \frac{184219}{305305}\right]\right) \cdot \frac{100 - 99}{162 - 99} =$$

$$= 2 + \frac{184219}{305305} + (1 - 2 \cdot \frac{184219}{305305}) \cdot \frac{1}{63} =$$

$$= 2 + \frac{184219}{305305} + \frac{1}{63} - \frac{184219 \cdot 2}{305305 \cdot 63} =$$

$$= 2 + \frac{11606107 + 378305 - 114219}{10234215} = 2 + \frac{11726883}{10234215}$$

$$x_4 = 2 + \frac{11726883}{10234215} \quad \text{2,611329}$$

$$E_4 \leftarrow b - x_4 = 3 - 2 - \frac{184219}{305305} = 0,306 \dots$$

Aplicación al aula

2. Actividades sobre resolución y comparación de métodos

Actividad:

Utiliza el método de Cardano para obtener 6 aproximaciones a la solución de la ecuación

$$x^3 + 2x^2 + x = 25 \frac{2}{3}$$

Completa una tabla en la que aparezca para cada paso del proceso, la aproximación de Chuquet, el valor decimal de dicha aproximación, una cota del error cometido y la aproximación de Cardano.

CHUQUET Y CARDANO
($x_0 = 2.323579034 \dots$)

$x^3 + 2x^2 + x = \frac{77}{3}$	$a = 2$	$b = 3$	
CHUQUET APROXIMACIÓN	VALOR DECIMAL	ERROR	CARDANO APROXIMACIÓN
$x_1 = \frac{5}{2}$	2.5	< 0.5	$x_1 = 2.125$
$x_2 = \frac{7}{3}$	2.33	< 0.5	$x_2 = 2.3101 \dots$
$x_3 = \frac{9}{4}$	2.25	< 0.16	$x_3 = 2.3209 \dots$
$x_4 = \frac{16}{3}$	2.2857...	< 0.023...	$x_4 = 2.32304 \dots$
$x_5 = \frac{23}{10}$	2.3	< 0.004...	$x_5 = 2.32348 \dots$
$x_6 = \frac{30}{13}$	2.3076...	< 0.033...	$x_6 = 2.3235 \dots$
$x_7 = \frac{37}{16}$	2.3125...	< 0.0256...	
$x_8 = \frac{44}{19}$	2.3157...	< 0.0208...	
$x_9 = \frac{51}{22}$	2.3181...	< 0.0154...	
$x_{10} = \frac{58}{25}$	2.32	< 0.0155...	
$x_{11} = \frac{65}{28}$	2.3214...	< 0.0133...	
$x_{12} = \frac{72}{31}$	2.3225...	< 0.0119...	
$x_{13} = \frac{79}{34}$	2.3235...	< 0.0107...	
$x_{14} = \frac{86}{37}$	2.3243...	< 0.0098...	

Aplicación al aula

3. Actividades de programación de los algoritmos

```
NumericoCardano.py
def cardano (valinf,valsup):
    funcion_valinf=valinf**4 + 3*valinf**3
    funcion_valsup=valsup**4 + 3*valsup**3
    valmed=valinf+(valsup-valinf)*(100-funcion_valinf)/(funcion_valsup-funcion_valinf)
    return valmed

def error_cardano (valinf,valsup):
    error = valsup-valinf
    return error

valinf=2
valsup=3
n=0

error = error_cardano(valinf,valsup)
valmed=cardano(valinf,valsup)

while error > 0.01 and n<30:
    valmed=cardano (valinf,valsup)
    error = error_cardano(valinf,valsup)
    ## Escribimos el error en notación científica con 4 decimales
    errornotcientifica = '{:.4e}'.format(error)
    n=n+1
    print("x",n,"=", valmed, " con un error máximo de ", errornotcientifica)
    funcion_valmed=valmed**4 + 3*valmed**3
    if funcion_valmed < 100 :
        valinf = valmed
    else:
        valsup = valmed

Ln: 1 Col: 0
```

Actividad:

Utiliza el el lenguaje de programación **Python** para generar un código que implemente los tres métodos descritos en este trabajo.

Método de Cardano para la ecuación $x^4 + 3x^3 = 100$

Notas finales

El desarrollo de esta propuesta didáctica nos ha permitido:

1. Incluir el ordenador como una herramienta activa dentro del aprendizaje de las matemáticas.
2. Que los alumnos detecten un vínculo bidireccional ordenador-matemáticas.
3. Incluir el estudio del error en la aproximación de los números reales en un ambiente contextualizado.
4. Hacer ver al alumno la evolución de la notación en matemáticas y su importancia en el desarrollo de las mismas.
5. Observar la dificultad del método de Cardano en la ausencia de una interpretación geométrica.