Apuntes históricos sobre la aproximación de soluciones numéricas y su aplicación en el aula

A. Linero Bas, A. Mellado Romero
Universidad de Murcia
lineroba@um.es, antmero@gmail.com

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE MURCIA

1ª Escuela de Verano CEMat en Historia de las Matemáticas: estudio, aplicaciones y enseñanza
La Coruña, 8-10 Octubre, 2025

Esquema

Aspectos:

Objetivo principal: ejemplificar el uso y los beneficios de los aspectos históricos de las matemáticas;

- enseñanza en el aula (curiosidad; evitar miedos; superar obstáculos; ...)
- ámbito profesional (unidad; visión global; interacción; investigación; ...)
- sociedad (fruto del contexto histórico; uso; ...)

¿Por qué incentivar el estudio de la Historia de las Matemáticas?

- Dar a conocer la matemática al público en general y reflexionar sobre el papel de la matemática en nuestra cultura y nuestra sociedad: producto de la actividad humana y de un determinado contexto social, no caen del cielo.
- Visión global de un tema. Acompañarlo con la 'memoria' que se tenga del pasado para configurar nuestro conocimiento.
- Conocer las obras de los clásicos: encontrar tesoros en forma de mensajes y sugerencias para desarrollos futuros.
- Recursos para el aula: atraer la atención del alumno, despertar su curiosidad, avivar el interés en una formación humanística.
- Herramienta útil en la educación: hacer atractivos los temas de que se habla, proporcionar motivación y sentido a lo que explicamos.
- Visión unitaria de las matemáticas frente a tendencias centrífugas

Por la historia

Recomendamos su lectura.

J. Ferreirós
Por la Historia
Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española, Vol. 6, No. 1 (2003), 103-111

Importancia de la historia

«Pour prévoir l'avenir des Mathématiques, la vraie méthode est d'en étudier l'histoire et l'état présent».

H. Poincaré
L'avenir des Mathématiques
Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 Aprile 1908)
G. Castelnuovo (ed.), Tipografia della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1909. Páginas 167–182.

Libro de actas muy interesante, con un elenco de matemáticos de la época fantástico. Con artículos de Volterra, Darboux, Poincaré, Loria, Smith, etc.

Sobre la especialización y el aprovechamiento de un congreso

«A mesure que la science se développe, il devient plus difficile de l'embrasser tout entière; alors on cherche á la couper en morceaux, á se contenter de l'un de ces morceaux: en un mot, á se spécialiser. Si l'on continuait dans ce sens, se serait un obstacle fâcheux aux progrès de la Science».

«...C'est par des rapprochements inattendues entre ses diverses parties que ses progrès peuvent se faire. Trop se spécialiser, ce serait s'interdire ces rapprochements. ...En nous mettant en rapports les uns avec les autres, nous ouvriront des vues sur le champ du voisin, nous obligeront à le comparer au nôtre, á sortir un peu de notre petite village, et seront ainsi ainsi le meilleur remède au danger que je viens de signaler».

¿Por qué elegir el tema de la aproximación de ecuaciones?

- Ilustrar la labor de medir en matemáticas, asociada a problemas del contexto de la época
- Caso práctico de beneficios del estudio de la historia: docencia; labor de investigación; unidad de las matemáticas
- Visión global del problema de resolver ecuaciones
- Salvar obstáculos en la docencia: introducir números irracionales; lenguaje matemático; utilidad de las matemáticas
- Adentrar al alumnado en nuevos temas: idea de recurrencia y su interpretación gráfica

Como leemos en Rey Pastor, la actividad matemática ya está prefigurada en la Prehistoria, con sus características principales:

$\boxed{\text{contar, medir y ordenar}}$.

J. Rey Pastor, J. Babini
Historia de la Matemática, Volumen 1, 2ª Ed.
Editorial Gedisa, Barcelona, 1997

Contar, medir, ordenar

«La expresión: el mundo está impregnado de matemática, convertida en lugar común en una era tecnológica como la actual, es una expresión válida para todas las épocas humanas, tan consustanciados están el contar y el comparar con las específicas actividades del hombre: pensar, hablar y fabricar instrumentos.

En la mente y en la acción del hombre prehistórico no están ausentes los números más simples, las formas más elementales y la ordenación más visible de las cosas. En el hombre que da nombre a las cosas y a los actos; que conserva el fuego e imagina trampas para cazar animales; que construye viviendas y tumbas; que observa el movimiento de los astros y destaca direcciones especiales; que computa distancias con su cuerpo y sus pasos; que graba escenas de un impresionante realismo; en ese hombre y en esas actividades están prefigurados los conceptos básicos de la matemática: número, medida, orden».

- La resolución de ecuaciones cuadradas y cúbicas aparecen de manera natural como consecuencia precisamente de tratar de medir (longitudes), áreas y volúmenes.
- Tarea común en diferentes culturas: Babilonia, India, China,...
- Se pueden considerar como las ecuaciones (polinómicas) más simples de resolver:

  $\boxed{\text{ecuaciones puras} \to x^2 = a, x^3 = b \to x^n = a.}$

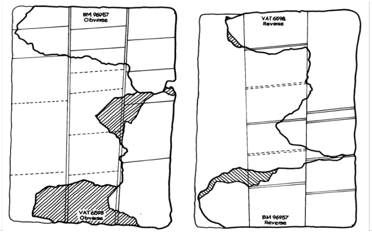
- ¿Qué se pierde al calcular $\sqrt{2}$ con un par de cliques en una calculadora?

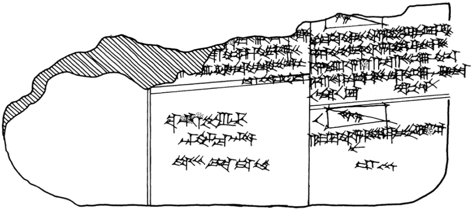
- Babilonia.
- Los Salvasutra en la India.
- Raíces cúbicas en la *Metrica* de Herón de Alejandría.
- Leonardo de Pisa y su *Liber Abaci*.
- Ejemplo español: Pérez de Moya.
- Resolución general dada por Viète en su *De Numerosa Potestatum*.
- Otros algoritmos: De Lagny y Halley.

- Ejemplo: Tablilla BM 96957 + VAT 6598
- (VAT) Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museen, Berlin.
  (BM) British Museum, Londres
- En 1980, se encuentra un fragmento en el BM, unión directa de la VAT 6598. El nuevo fragmento añade nuevos problemas sobre construcción.
- Datación: Aproximadamente, 2000 a.C.

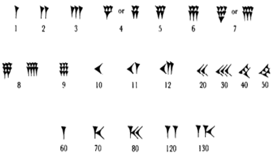
E. Robson
Mesopotamian Mathematics, 2100–1600 BC: Technical Constants in Bureaucracy and Education
Clarendon Press, Oxford, 1999

Parte II
Apuntes históricos: Babilonia



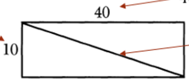


BM 96957 Reverse



$\frac{10}{60} = \frac{1}{6} \leftarrow 10$

$40 \rightarrow \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$



$$d = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

Rev. i

19[VAT] KÁ $\frac{1}{2}$ ⟨NINDAN⟩ 2 KÙŠ SUKUD 2 KÙŠ DAGAL *ṣí-li-⟨ip⟩-ta-šu* EN.NAM

20 ZA.E 10 DAGAL *šu-tam-ḫir* 1 40 *qà-qá-⸢ra ta-mar⸣*

IGI 40 KÙŠ SUKUD DU$_8$.A *a-na* 1 40 *qà-qá-ri i-ši*

2 30 *ta-mar* $\frac{1}{2}$ 2 30 *ḫe-pé* 1 15 *ta-mar* 1 15

[*a-na* 40] ⸢SUKUD⸣ [DAḪ].ḪA 41 15 *ta-mar* 41 15

[*ṣí-li-ip-tum*] ⸢*ne*⸣*-pé-šum*

A gate, of height $\frac{1}{2}$ ⟨nindan⟩, 2 cubits and breadth 2 cubits. What is its diagonal? You: square 0;10, the breadth. You will see 0;01 40, the base. Take the reciprocal of 0;40 (cubits), the height; multiply by 0;01 40, the base. You will see 0;02 30. Break in half 0;02 30. You will see 0;01 15.

Add 0;01 15 to 0;40, the height. You will see 0;41 15. Its diagonal is 0;41 15. The method.

BM 96957 +VAT 6598

Three Old Babylonian Methods for Dealing with "Pythagorean" Triangles

Author(s): Eleanor Robson

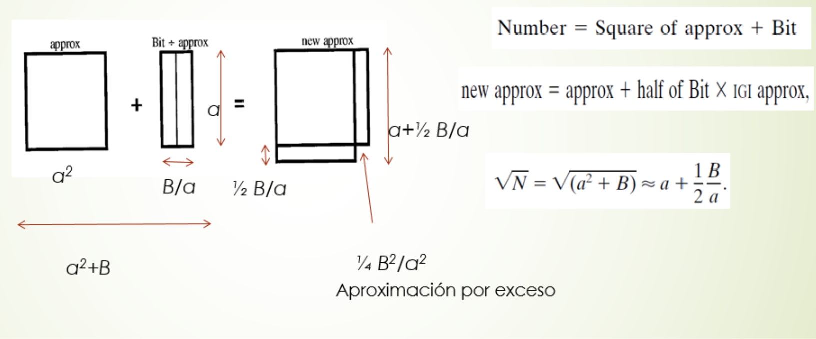
Source: *Journal of Cuneiform Studies*, Vol. 49 (1997), pp. 51-72

«Consideremos una puerta, con una altura de media vara y dos codos y con una anchura de dos codos. ¿Cuál es la diagonal? Tú: eleva al cuadrado 0;10, la amplitud. Obtendrás 0; 01 40, la base. Toma el recíproco de 0; 40, la altura; multiplica por 0; 01 40, la base. Obtendrás 0; 02 30. Parte por la mitad 0; 02 30. Obtendrás 0; 01 15. Añade 0; 01 15 a 0; 40, la base. Obtendrás 0; 41 15. Su diagonal es 0; 41 15. El método.»

«Consideremos una puerta, con una altura de media vara y dos codos y con una anchura de dos codos. ¿Cuál es la diagonal? Tú: eleva al cuadrado 1/6 la amplitud. Obtendrás 1/36, la base. Toma el recíproco de 2/3, la altura; multiplica por 1/36, la base. Obtendrás 1/24. Parte por la mitad 1/24. Obtendrás 1/48. Suma 1/48 a 2/3, la altura. Obtendrás 11/16. La diagonal es 11/16.»

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2} \longleftarrow \boxed{d=\frac{11}{16}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{2}{3}}} \qquad \boxed{0;41\,15=\frac{41}{60}+\frac{15}{60^2}=\frac{11}{16}}$$

No hay evidencias directas, pero podemos pensar que lo hicieron de modo geométrico. Indiquemos que la tablilla sólo establece la receta. Según Fowler y Robson, "Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics", Historia Mathematica 25 (1998), 366–378:



Método para aproximar la raíz cuadrada (Herón de Alejandría, Métrica, libro I, 8)

Aparece en el contexto del cálculo de un área, en donde es preciso determinar el valor aproximado del número irracional $\sqrt{720}$

Herón procede siguiendo la siguiente regla de iteración (en lenguaje moderno) para aproximar $\sqrt{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

En 1896, R. Schöne descubrió en Constantinopla la obra de la Métrica de Herón. Su hijo H. Schöne la editó en 1903 (Heronis Alexandrini Opera, iii, Teubner)

(i.) *Area of a Triangle Given the Sides*

Heron, *Metr.* i. 8, ed. H. Schöne (Heron iii.) 18. 12–24. 21

Ἔστι δὲ καθολικὴ μέθοδος ὥστε τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν οἱουδηποτοῦν τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εὑρεῖν χωρὶς καθέτου· οἷον ἔστωσαν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μονάδων ζ, η, θ. σύνθες τὰ ζ καὶ τὰ η καὶ τὰ θ· γίγνεται κδ. τούτων λαβὲ τὸ ἥμισυ· γίγνεται ιβ. ἄφελε τὰς ζ μονάδας· λοιπαὶ ε. πάλιν ἄφελε ἀπὸ τῶν ιβ τὰς η· λοιπαὶ δ. καὶ ἔτι τὰς θ· λοιπαὶ γ. ποίησον τὰ ιβ ἐπὶ τὰ ε· γίγνονται ξ. ταῦτα ἐπὶ τὸν δ· γίγνονται σμ· ταῦτα ἐπὶ τὸν γ· γίγνεται ψκ· τούτων λαβὲ πλευρὰν καὶ ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα μετὰ διαφόρου ἐλαχίστου τὴν πλευρὰν οὕτως· ἐπεὶ ὁ συνεγγίζων τῷ ψκ τετράγωνός ἐστιν ὁ ψκθ καὶ πλευρὰν ἔχει τὸν κζ, μέρισον τὰς ψκ εἰς τὸν κζ· γίγνεται κϛ καὶ τρίτα δύο· πρόσθες τὰς κζ· γίγνεται νγ τρίτα δύο. τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται κϛ ∠γʹ. ἔσται ἄρα τοῦ ψκ ἡ πλευρὰ ἔγγιστα τὰ κϛ ∠γʹ. τὰ γὰρ κϛ ∠γʹ ἐφ' ἑαυτὰ γίγνεται ψκ λϛʹ· ὥστε τὸ διάφορον μονάδος ἐστὶ μόριον λϛʹ. ἐὰν δὲ βουλώμεθα

470

(i.) *Area of a Triangle Given the Sides*

Heron, *Metrica* i. 8, ed. H. Schöne (Heron iii.) 18. 12–24. 21

There is a general method for finding, without drawing a perpendicular, the area of any triangle whose three sides are given. For example, let the sides of the triangle be 7, 8 and 9. Add together 7, 8 and 9; the result is 24. Take half of this, which gives 12. Take away 7; the remainder is 5. Again, from 12 take away 8; the remainder is 4. And again 9; the remainder is 3. Multiply 12 by 5; the result is 60. Multiply this by 4; the result is 240. Multiply this by 3; the result is 720. Take the square root of this and it will be the area of the triangle. Since 720 has not a rational square root, we shall make a close approximation to the root in this manner. Since the square nearest to 720 is 729, having a root 27, divide 27 into 720; the result is $26\frac{2}{3}$; add 27; the result is $53\frac{2}{3}$. Take half of this; the result is $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(=26\frac{5}{6})$. Therefore the square root of 720 will be very nearly $26\frac{5}{6}$. For $26\frac{5}{6}$ multiplied by itself gives $720\frac{1}{36}$; so that the difference is $\frac{1}{36}$. If we wish to make the difference less than $\frac{1}{36}$, instead of 729 we shall take the number now found, $720\frac{1}{36}$, and by the same method we shall find an approximation differing by much less than $\frac{1}{36}$.[a]

Parte II
Apuntes históricos: Herón

(i.) *Area of a Triangle Given the Sides*

Heron, *Metrica* i. 8, ed. H. Schöne (Heron iii.) 18. 12–24. 21

There is a general method for finding, without drawing a perpendicular, the area of any triangle whose three sides are given. For example, let the sides of the triangle be 7, 8 and 9. Add together 7, 8 and 9; the result is 24. Take half of this, which gives 12. Take away 7; the remainder is 5. Again, from 12 take away 8; the remainder is 4. And again 9; the remainder is 3. Multiply 12 by 5; the result is 60. Multiply this by 4; the result is 240. Multiply this by 3; the result is 720. Take the square root of this and it will be the area of the triangle. Since 720 has not a rational square root, we shall make a close approximation to the root in this manner. Since the square nearest to 720 is 729, having a root 27, divide 27 into 720; the result is $26\frac{2}{3}$; add 27; the result is $53\frac{2}{3}$. Take half of this; the result is $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(=26\frac{5}{6})$. Therefore the square root of 720 will be very nearly $26\frac{5}{6}$. For $26\frac{5}{6}$ multiplied by itself gives $720\frac{1}{36}$; so that the difference is $\frac{1}{36}$. If we wish to make the difference less than $\frac{1}{36}$, instead of 729 we shall take the number now found, $720\frac{1}{36}$, and by the same method we shall find an approximation differing by much less than $\frac{1}{36}$.[a]

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{N}{x_n}\right)$$

$$\sqrt{720}=\sqrt{729-9}\rightarrow \textit{primera aproximación}: 27$$

$$\tfrac{1}{2}\left(27+\tfrac{720}{27}\right)=26\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\left(=26\tfrac{5}{6}\right)$$

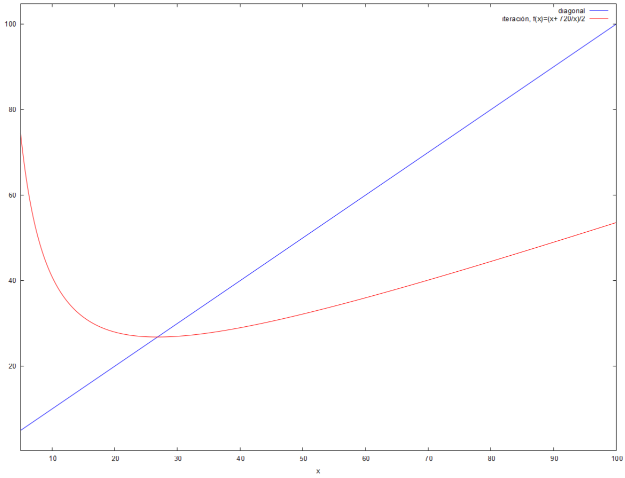
$$\sqrt{720}\approx 26\frac{5}{6}$$

$$\left(26+\frac{5}{6}\right)^2=720+\frac{1}{36}\rightarrow \textit{diferencia de } \frac{1}{36}$$

$$\sqrt{720}=\sqrt{\left(720+\frac{1}{36}\right)-\frac{1}{36}}\rightarrow$$

$$\textit{segunda aproximación}: 26+\frac{5}{6}\rightarrow$$

repetir el procedimiento, diferencia menor



diagonal
iteración, f(x)=(x+ 720/x)/2
100
80
60
40
20
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
x

También en la Métrica, libro III, Herón muestra un método para aproximar raíces cúbicas. En su caso, aproxima

$$\sqrt[3]{100}$$

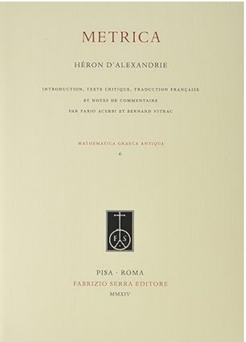
al querer trazar sobre una pirámide un plano paralelo a la base, de manera que la división origine una nueva pirámide cercana al vértice que sea justamente el cuádruplo de la parte restante de pirámide.

Tomando como 5 la distancia de los vértices del cuadrado de la base hasta la cima de la pirámide, es necesario calcular $\sqrt[3]{100}$.

Las siguientes imágenes se han confeccionado a partir de:

Fabio Acerbi, Bernard Vitrae, *Metrica. Héron d'Alexandrie. Introduction, texte critique, traduction francaise et notes de commentaire*. Fabrizio Serra Editore, Pisa, Roma, 2014.

Parte II
Apuntes históricos: Herón



Parte II
Apuntes históricos: Herón

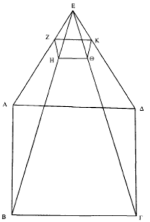
Κ Ἔστω γὰρ πυραμὶς βάσιν μὲν ἔχουσα οἱανδηποτοῦν τὴν ΑΒΓΔ κορυφὴν δὲ τὸ Ε σημεῖον καὶ δεδόσθω αὐτῆς μία πλευρὰ ἡ ΑΕ μονάδων ε. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτὴν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει ὥστε τὴν ἀποτεμνομένην πρὸς τῇ κορυφῇ πυραμίδα τοῦ καταλειπομένου στερεοῦ εἶναι, εἰ τύχοι, τετραπλῆν.

τεμνέσθω καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΖΗΘΚ. ‹ἡ ἄρα ΑΖ› πλευρά ἐστι τοῦ ΑΒΓΔΖΗΘΚ στερεοῦ· ἡ ἄρα ΑΒΓΔΕ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΕ πυραμίδα λόγον ἔχει ὃν τὰ ε πρὸς τὰ δ· ὡς δὲ αἱ πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας οὕτως οἱ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν κύβοι· ὁ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΕΖ κύβον λόγον ἔχει ὃν τὰ ε πρὸς τὰ δ· καὶ ἔστιν ‹ὁ› ἀπὸ τῆς ΑΕ κύβος μονάδων ρκε· ὁ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ κύβος ἔσται μονάδων ρ· δεήσει ἄρα τῶν ρ μονάδων λαβεῖν κυβικὴν πλευρὰν ὡς ἔγγιστα· ἔστι δὲ μονάδων δ καὶ θ ιδʹ, ὡς ἑξῆς δείξομεν. ὥστε ἐὰν ἀποληφθῇ ἡ ΕΖ μονάδων δ καὶ θ ιδʹ καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τμηθῇ ἡ πυραμὶς ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἔσται τὸ προκείμενον.

συντεθήσεται δὲ οὕτως. κύβισον τὰ ε· γίγνεται ρκε. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶν ἐν ᾧ διαιρεῖται ἡ πυραμὶς ὃν δ πρὸς α, σύνθες δ καὶ ἕν· γίγνεται ε. καὶ τὰ ρκε ἐπὶ τὸν δ· γίγνεται φ· παράβαλε παρὰ τὸν ε· γίγνεται ρ· καὶ τούτων κυβικὴν πλευράν· γίγνεται δ καὶ θ ιδʹ. τοσούτου ἔσται ἡ ΕΖ:

ὡς δὲ δεῖ λαβεῖν τῶν ρ μονάδων κυβικὴν πλευρὰν νῦν ἐροῦμεν.

λαβὲ τὸν ἔγγιστα κύβον τοῦ ρ τόν τε ὑπερβάλλοντα καὶ τὸν ἐλλείποντα· ἔστι δὲ ὁ ρκε καὶ ὁ ξδ. καὶ ὅσα μὲν ὑπερβάλλει· μονάδες κε· ὅσα δὲ ἐλλείπει· μονάδες λς· | καὶ ποίησον τὰ ε ἐπὶ τὰ λς· γίγνεται ρπ· καὶ τὰ ρ· γίγνεται σπ· ‹καὶ παράβαλε τὰ ρπ παρὰ τὰ σπ·› γίγνεται θ ιδʹ· πρόσβαλε τῇ τοῦ ἐλάσσονος κύβου πλευρᾷ, τουτέστι τῷ δ· γίγνεται μονάδες δ καὶ θ ιδʹ. τοσούτων ἔσται ἡ τῶν ρ μονάδων κυβικὴ πλευρὰ ὡς ἔγγιστα: –



XX Soit en effet une pyramide ayant d'une part une base quelconque, ΑΒΓΔ, d'autre part comme sommet le point Ε ; et qu'un seul de ses côtés, ΑΕ, soit donné, de 5 unités. Et qu'il faille la couper par un plan parallèle à la base, de sorte que la pyramide découpée près du sommet soit, par exemple, quadruple du solide qui est laissé comme reste.

Qu'elle soit coupée et que cela produise comme section le [domaine] ΖΗΘΚ. [ΑΖ est donc] un côté du solide ΑΒΓΔΖΗΘΚ ; la pyramide ΑΒΓΔΕ, relativement à la pyramide ΖΘΗΚΕ, a donc comme rapport celui qu'[ont] les 5 relativement aux 4[179] ; or, comme sont les pyramides l'une relativement à l'autre, ainsi sont les cubes sur les côtés homologues[180] ; le cube sur ΑΕ, relativement au cube sur ΕΖ, a donc comme rapport celui qu'[ont] les 5 relativement aux 4 ; et le cube sur ΑΕ est de 125 unités : le cube sur ΕΖ sera donc de 100 unités ; il faudra donc prendre un côté cubique des 100 unités à très peu près ; or il est de 4 unités et $9/14$, comme nous le montrerons à la suite. De sorte que si ΕΖ est découpée de 4 unités et $9/14$ et que par le point Ζ la pyramide est coupée par un plan parallèle à la base, on aura ce qui était proposé[181].

Et cela sera synthétisé ainsi. Cube les 5 : il en résulte 125. Et puisque le rapport, dans lequel la pyramide est divisée, est celui qu'[a] 4 à 1, compose 4 et un : il en résulte 5. Et les 125 par le 4 : il en résulte 500 ; applique[-les] au 5 : il en résulte 100 ; et de ceux-ci, un côté cubique : il en résulte 4 et $9/14$. Autant que cela sera ΕΖ.

Mais comment faut-il prendre un côté cubique des 100 unités, nous le dirons maintenant[182].

Prends le cube le plus proche de 100, aussi bien celui par excès que celui par défaut ; or ce sont 125 et 64. Et ce par quoi l'un excède est 25 unités, ce par quoi l'autre est en défaut est 36 unités ; et fais les 5 par les 36 : il en résulte 180 ; plus les 100 : il en résulte 280 ; ‹et applique les 180 aux 280 :› il en résulte $9/14$; ajoute-les[183] au côté du plus petit cube, c'est-à-dire au 4 : il en résulte 4 unités et $9/14$. Autant que cela sera le côté cubique des 100 unités à très peu près.

Mais comment faut-il prendre un côté cubique des 100 unités, nous le dirons maintenant[182].

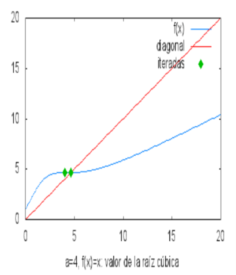
Prends le cube le plus proche de 100, aussi bien celui par excès que celui par défaut; or ce sont 125 et 64. Et ce par quoi l'un excède est 25 unités, ce par quoi l'autre est en défaut est 36 unités; et fais les 5 par les 36: il en résulte 180; plus les 100: il en résulte 280; ‹et applique les 180 aux 280›: il en résulte $\frac{9}{14}$; ajoute-les[183] au côté du plus petit cube, c'est-à-dire au 4: il en résulte 4 unités et $\frac{9}{14}$. Autant que cela sera le côté cubique des 100 unités à très peu près.

Aproximación de $\sqrt[3]{100} = 4.64158883361\ldots$

125, 64
125-100=25, 100-64=36,36•5=180,180+100=280,
180/280=9/14,
4+9/14= 4.6428571428571...

$a < \sqrt[3]{N} < a+1 \qquad d_1 = N - a^3 \qquad d_2 = (a+1)^3 - N \qquad a + \dfrac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + ad_2} \qquad a = 4$

En términos de iteración de funciones



$$x_{n+1} = x_n + \frac{(x_n+1)(N - {x_n}^3)}{(x_n+1)(N-{x_n}^3) + x_n((x_n+1)^3 - N)}$$

$$f(x) = x + \frac{(x+1)(N-x^3)}{(x+1)(N-x^3) + x((x+1)^3 - N)}$$

En su Métrica, Herón da otro método para aproximar las raíces cuadradas:

- $\sqrt{2}$ se aproxima mediante $\frac{17}{12}$ porque $2 \cdot 12^2 + 1 = 17^2$
- $\sqrt{3}$ se aproxima mediante $\frac{7}{4}$ porque $3 \cdot 4^2 + 1 = 7^2$
- $\sqrt{5}$ se aproxima mediante $\frac{9}{4}$ porque $5 \cdot 4^2 + 1 = 9^2$
- $\sqrt{8}$ se aproxima mediante $\frac{17}{6}$ porque $8 \cdot 6^2 + 1 = 17^2$

Ecuación de Pell: $N \cdot x^2 \pm 1 = y^2 \rightarrow$ aproximar $\sqrt{N}$ mediante $\frac{y}{x}$

Hasta el momento, hemos visto que:

- El cálculo de raíces aparece de manera natural
- El "método babilonio" de aproximación se perpetúa en la matemática griega

Para acabar con esta parte de la aproximación de ecuaciones puras:

- veremos brevemente alguna aportación de la matemática hindú,
- veremos algunos pasajes de Fibonacci, quien en su Liber Abaci difunde parte de la tradición matemática árabe,
- expondremos y justificaremos el método que aprendimos en la escuela para obtener raíces cuadradas, basado en el binomio de Newton,
- daremos otras ingeniosas aproximaciones pertenecientes a los siglos XVII-XIX.

Sulvasutra: Primeras manifestaciones de la matemática hindú, de índole geométrica; entre siglos VIII y II a.C.; reglas para la construcción de altares; en un complemento del Sulvasutra se dan, entre otras, las reglas para la construcción de cuadrados y rectángulos, y relaciones entre la diagonal y el lado de un cuadrado.

- **Construcción de un cuadrado de área doble de otro dado**

"Añadir al lado su tercera parte, luego la cuarta parte de esa tercera parte y restar después la treintaicuatroava parte de la cuarta parte de la tercera parte"

$$L + \frac{L}{3} + \frac{L}{12} - \frac{L}{34 \cdot 4 \cdot 3}$$

En el caso en que el cuadrado tenga lado unitario, obtenemos

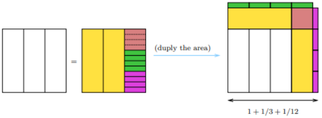
$$\sqrt{2} = 1+1/3+1/(4\cdot 3)-1/(34\cdot 4\cdot 3)(= 577/408 = 1{,}4142156862745\ldots)$$

Recordemos que $\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots$, cinco cifras decimales

Interpretación, según

B. Datta
The science of the Sulba: A Study In Early Hindu Geometry
University of Calcutta, 1932

$1 + 1/3 + 1/12$: nos pasamos, $(17/12)^2 = 2 + 1/144$ Por tanto, debemos tomar un lado menor,
$2x(1 + 1/3 + 1/12) = (1/12)^2 \to x = 1/(34 \cdot 4 \cdot 3)$



Parte II
Apuntes históricos: India

THE

SCIENCE OF THE SULBA

A STUDY IN EARLY HINDU GEOMETRY

(Readership Lectures for the year 1931)

BY

BIBHUTIBHUSAN DATTA

हिरण्मयेन पात्रेण सत्यस्यापिहितं मुखम्।
तत्त्वं पूषन्नपावृणु सत्यधर्माय दृष्टये॥
ईशोपनिषद्

"The face of Truth is covered with a shining lid; that do thou remove, O Fosterer, so that Truth may be seen."

PUBLISHED BY THE
UNIVERSITY OF CALCUTTA
1932

https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.512150/page/n5/mode/2up

Fibonacci: (s. XIII)

- Trata el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas en el Cap. XIV de su *Liber Abaci*, 1202.
- También trata el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas en los capítulos II y V, respectivamente, de su *Practica Geometriae*, 1220.

Por no hacer demasiada detallada la charla, mencionaremos cómo se obtiene la raíz cuadrada; hemos de mencionar que, previo a la resolución de raíces cúbica, Fibonacci explica cómo desarrollar el cubo de un binomio.

Parte II
Apuntes históricos: Leonardo de Pisa

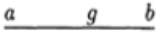
Finding the Root of 8754.

	6	11	105
8	7	5	4
		9	3
		9	3

Also if you will wish to find the root of 8754 that is a number of four figures, then we know similarly that the root of it is a number of two figures; therefore you put below the second place of the number, namely below the 5, the largest root that 87 has, namely the number made of the two last figures of 8754, and the root will be 9 which you twice put below the 5, and you multiply the 9 by the 9, and subtract the product from the 87 leaving 6 above the 7; this coupled with the preceding figure, namely the 5, makes 65 for which you put twice before the put nines some figure, that when multiplied by double the 9, and the product subtracted from the 65 leaves a number which when coupled with the figure of the first place, namely the 4, can then be subtracted from the product of the figure below the first place by itself and does not leave more than double the entire found root, and the figure will be 3; this is twice put below the 4 before the put nines;you will multiply crosswise the 3 by the 9 and the 3 by the 9; there will be 54 that you subtract from the 65 leaving 11 that you put above the 65, and you will couple the 11 with the 4 that is in the first place; there will be 114 from which you subtract the product of the 3 by the 3, namely 9; there will remain 105; therefore the root of 8754 is in integers 93, and 105 remains; this you divide by the double of the 93; the quotient will be $\frac{35}{62}$ which you add to the found 93; there will be $\frac{35}{62}93$ for the root of 8754.

(tomado de "Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation", Laurence Sigler, Springer. 2003)

Parte II
Apuntes históricos: Leonardo de Pisa



A cubic number is indeed that which arises from the multiplication of three equal numbers, or from a square number by its root, as in 8 or 27; and the 8 arises from the multiplication of 2 by 2 by 2, or from the multiplication of four by its root, namely 2; and the 27 arises from the three threes, or from nine multiplied by its root, that is 3. And the cubic root of eight is 2, and the cubic root of 27 is 3, and thus you understand for the other cubic numbers and their roots. Moreover the remaining numbers which are not cubic cannot have cubic roots in integral numbers. Whence the cubic roots of them are said to be surds. And I shall demonstrate how to find the approximation of any cubic root you wish. But first before the method of finding the root proceeds, I wish now to prove it. Therefore when a line segment is divided into two parts, the cubes of the portions plus triple the products of the square of one section by the other will be equal to the cube of the entire line segment. For example, let the line segment be *.ab.*, and let it be separated by the point *.g.*; I say that the cubes of the portions *.ag.* and *.gb.* plus triple the square of the portion *.ag.* times *.gb.* plus triple the square of the portion *.bg.* times *.ga.* will be the cube of the line segment *.ab.*; this is seen in numbers: let the total *.ab.* be 5, and let *.ag.* be 3; *.gb.* will remain 2; the portions cubed are 27 and 8; these added together make 35, and the triple of the square of 3 by 2 makes 54, and the triple of the square of 2 by 3 makes 36, and thus 125 is had for the sum, namely the cube of five, namely the line segment *.ab.* And 5 is the cubic root of 125; it multiplied by itself makes 25, which multiplied by 5 makes 125. And I thought longer on this

Raíces cúbicas

$(ag+gb)^3$

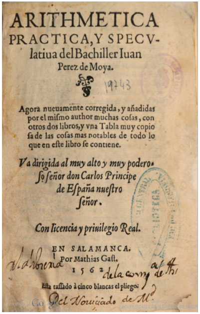
$(ag)^3+(gb)^3+3(ag)^2gb+3(gb)^2ag$

Ejemplo: 5=2+3

(tomado de "*Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*", Laurence Sigler, Springer, 2003)

El algoritmo tradicional

Para exponer y justificar el método que aprendimos en la escuela para obtener raíces cuadradas, basado en el binomio de Newton, usaremos la obra *Arithmetica Practica y Especulativa* de Juan Pérez de Moya (Santisteban del Puerto, Jaén ¿1512? –Granada, 1596).



ARITHMETICA
PRACTICA, Y SPECV-
latiua del Bachiller Iuan
Perez de Moya.

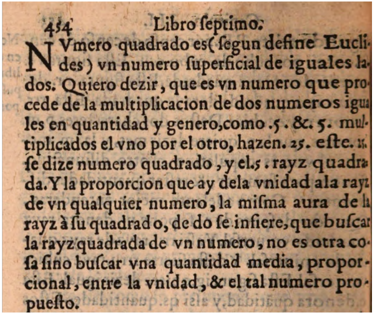
Agora nueuamente corregida, y añadidas por el miſmo author muchas coſas, con otros dos libros, y vna Tabla muy copioſa de las coſas mas notables de todo lo que en eſte libro ſe contiene.

Va dirigida al muy alto y muy poderoſo ſeñor don Carlos Principe de Eſpaña nueſtro ſeñor.

Con licencia y priuilegio Real.

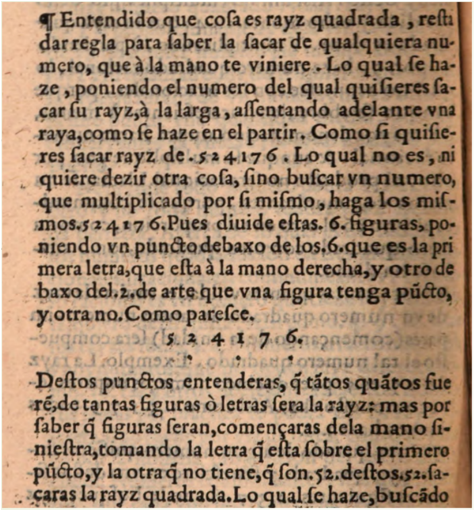
EN SALAMANCA.
Por Mathias Gaſt.
1562

Eſta taſſado à cinco blancas el pliego.



454 Libro ſeptimo.

NVmero quadrado es(ſegun define Euclides) vn numero ſuperficial de iguales lados. Quiero dezir, que es vn numero que procede de la multiplicacion de dos numeros igua-
les en quantidad y genero, como .5. &c. 5. multiplicados el vno por el otro, hazen. 25. eſte. 25.
ſe dize numero quadrado, y el.5. rayz quadrada. Y la proporcion que ay dela vnidad ala rayz de vn qualquier numero, la miſma aura de la rayz à ſu quadrado, de do ſe infiere, que buſcar la rayz quadrada de vn numero, no es otra coſa ſino buſcar vna quantidad media, proporcional, entre la vnidad, & el tal numero propueſto.


¶ Entendido que coſa es rayz quadrada, reſta dar regla para ſaber la ſacar de qualquiera numero, que à la mano te viniere. Lo qual ſe haze, poniendo el numero del qual quiſieres ſacar ſu rayz, à la larga, aſſentando adelante vna raya, como ſe haze en el partir. Como ſi quiſieres ſacar rayz de .524176. Lo qual no es, ni quiere dezir otra coſa, ſino buſcar vn numero, que multiplicado por ſi miſmo, haga los miſmos .524176. Pues diuide eſtas .6. figuras, poniendo vn puncto debaxo de los .6. que es la primera letra, que eſta à la mano derecha, y otro debaxo del .2. de arte que vna figura tenga pũcto, y otra no. Como pareſce.

5 2 4 1 7 6.

Deſtos punctos entenderas, q̃ tãtos quãtos fueré, de tantas figuras ò letras ſera la rayz: mas por ſaber q̃ figuras ſeran, començaras dela mano ſinieſtra, tomando la letra q̃ eſta ſobre el primero pũcto, y la otra q̃ no tiene, q̃ ſon .52. deſtos .52. ſacaras la rayz quadrada. Lo qual ſe haze, buſcãdo

Colocamos el número y dividimos en grupos de dos cifras

5 2 4 1 7 6.

Empezamos con el 52; se saca su raíz cuadrada, 7 vn numero, q̃ multiplicado por ſi miſmo haga los.52.y no mas, o ſe llegue a ellos lo mas q̃ pudiere, que ſera.7. porq̃ ſiete vezes.7.ſon.49.reſta 49.de los.52.y quedaran.3.pon los.7.que te vinieron por rayz, vna vez en el primero puncto, y otra ſobre la raya, que eſta adelante del numero, de q̃ ſacas rayz, y eſto ſe haze para denotar, que ſe multiplica el.7.por.7.que es por ſi miſmo, y los.3.que ſobraron poner los has ſobre los 52.como pareſce figurado.

```
0 3
5 2 4 1 7 6 |7
.     .     .
  7
```

Y aſsi diras, que la rayz de.52.es.7.y ſobran.3. Proſigue para ſacar la rayz de los.3.que ſobrarõ, y de los.4.que eſtan entre los dos punctos, lo qual haras doblando los.7.q̃ te han venido por rayz. Como mueſtra Euclides en la quarta del ſegundo, que ſon.14.põ eſtos.14.debaxo de los 34.como ſi fueſſen los.14.algun partidor, y no cures del.7.que puſiſte en el puncto primero, como pareſce.

```
0 3
5 2 4 1 7 6 |7
.     .     .
  7 4
```

Obtenemos la primera cifra, 7

Los 3=52-49 que sobran se ponen encima de 52

Proſigue para ſacar la rayz de los.3.que ſobraró, y de los.4. que eſtan entre los dos punctos, lo qual haras doblando los.7. q̃ te han venido por rayz. Como mueſtra Euclides en la quarta del ſegundo, que ſon,34.põ eſtos.14. debaxo de los 34.como ſi fueſſen los.14. algun partidor, y no cures del.7.que puſiſte en el puncto primero,co mo pareſce.

```
        0 3
        5 2 4 1 7 6 |7
        7 4
        1
```

Ff 5 Aora

Unimos los 3 que han sobrado con el 4 que viene a continuación

Se dobla 7, el resultado del cual ya disponemos, obtenemos 14, colocados así

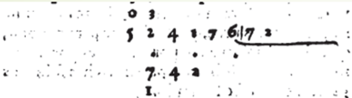
```
7 4
1
```

Aora partiras los.34.que eſtan ſobre los.14.por los miſmos.14.diziendo.3.partidos a vno,caben a.2.eſte.2.pondras en el ſegundo pũcto vna vez, y otra ſobre la raya,que eſta adelante del nume ro,de que ſacas rayz,como pareſce.

```
        0 3
        5 2 4 1 7 6 |7 2
        7 4 2
        1
```

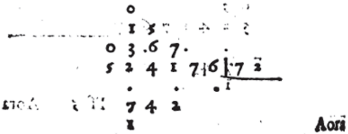
Se divide 34/14, lo que cabe a 2

Se pone el 2 en el segundo puntito y en la raya junto al 7



Hecho eſto multiplicaras.142. que eſtan debaxo,cada letra por ſi,por el dos que puſiſte por rayz deſta ſegunda ordē,y lo q̃ mōtarē las multiplicaciones,reſtar lo has deſo q̃ eſtuuiere arriba:como ſi fueſſe partir. Diziendo.2.vezes.1.ſon

ba:como ſi fueſſe partir. Diziendo.2.vezes.1.ſon
2.quien los reſta de.3.queda vno,pon eſte.1.ſobre los.3.y proſigue multiplicando las otras letras,que ſon.4.y.2.por el meſmo.2.diziendo.2.vezes.4.ſon.8.reſta.8.de.14.y quedan.6.pon los encima,como hazes en las particiones reſtando algo,y proſigue adelante, multiplicando.2.por.2.y ſeran.4.quita eſtos.4.de los.6r. que eſtan arriba,y quedaran.57.los quales podras ſobre los miſmos.61.como pareſce.



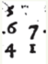
Aora

Se multiplica 142 por 2

Explica cómo multiplicar

Indica las operaciones, cifra por cifra

En definitiva, hay que restarle 284 a 341:
Se obtiene 57, que se colocará así



A continuación, se sacará la tercera cifra

0 3
5 2 4 1 7 6|7 2
7 4 2
1

Hecho eſto multiplicaras.142. que eſtan debaxo,cada letra por ſi,por el dos que puſiſte por rayz deſta ſegunda ordẽ,y lo q̃ mõtarẽ las multiplicaciones,reſtar lo has deſo q̃ eſtuuiere arriba:como ſi fueſſe partir. Diziendo.2.vezes.1.ſon

ba:como ſi fueſſe partir. Diziendo.2.vezes.1.ſon
2.quien los reſta de.3.queda vno,pon eſte.1.ſobre los.3.y proſigue multiplicando las otras letras,que ſon.4.y.2.por el meſmo.2.diziendo.2.vezes.4.ſon.8.reſta.8.de.14.y quedan.6.pon los encima,como hazes en las particiones reſtando algo,y proſigue adelante, multiplicando.2.por 2.y ſeran.4.quita eſtos.4.de los.61.que eſtan arriba,y quedaran.57.los quales podras ſobre los miſmos.61.como pareſce.

0
1 3
0 3 6 7
5 2 4 1 7 6|7 2
7 4 2
1

Aora

Se multiplica 142 por 2

Explica cómo multiplicar

Indica las operaciones, cifra por cifra

En definitiva, hay que restarle 284 a 341:
Se obtiene 57, que se colocará así

3
6 7
4 1

A continuación, se sacará la tercera cifra

Parte II
Apuntes históricos: Pérez de Moya

Capitulo.IIII. 459

Aora para ſacar la tercera figura doblaras los 72. que monta la rayz,que ha venido haſta ora, y montara. 144. pon eſtos. 144. como ſi fueſſe partidor, començando de vna letra mas adelan te de aquellas con que ouieres tractado,que ſe- ra deſde el.14.deſta manera.

```
        0
        1 5
      0 3 6 7
    5 2 4 1 7 6 | 7 2
      7 4 2 4
        1 1 4
```

A continuación, se sacará la tercera cifra

Para ello se duplica 72, llegando a 144, que se coloca en el diagrama como aparece descrito

```
7 4 2 4
  1 1 4
```

Començа aora a partir los.577. q̃ eſtá arriba, por los.144.q̃ eſtan abaxo,de tal ſuerte, q̃ ſobre deſpues,para poder ſacar el quadrado dela letra, q̃ cupiere. Pues començando a partir con el.1. q̃ es la primera figura de los.144.los.5.q̃ es la prime ra letra de los,577.diziẽdo.5.a.1.caben.4.vezes,y ſobra.1.pon los.4.q̃ dizes q̃ caben vna vez en el pũcto q̃ eſta debaxo del.6. y otro adelãte delos 72.q̃ te ha ſalido por rayz,deſta ſuerte,q̃ pareſce.

```
        0
        1 5
      0 3 6 7
    5 2 4 1 7 6 | 7 2 4
      7 4 2 4 4
        1 1 4
```

Se dividen (parten) los 577 entre 144

Se obtiene 4

Se coloca un 4 en el punto que hay debajo de 6 y
se coloca otro 4 más allá del 72

Parte II
Apuntes históricos: Pérez de Moya

0
1 5
0 3 6 7
5 2 4 1 7 6 | 7 2 4
7 4 2 4 4
1 1 4

Aora multiplica los.1444.que eſtan debaxo, por los.4.que ſalieron por rayz, multiplicãdo ca da

Se debe multiplicar 1444 por 4

460 Libro ſeptimo.

da letra por ſi, y reſtando las multiplicaciones delo de arriba, ni mas ni menos, que como ſe haze quando partes, diziendo.4.vezes.1.ſon.4.reſtados de.5.que eſtan encima, queda.1.pon.1.ſobre el.5.y proſigue multiplicando los tres quatros que eſtan debaxo, por los.4. que vinieron por rayz, y reſtando las multiplicaciones de lo que ouiere arriba, no ſobrara ninguna coſa, como pareſce figurado.

0
0 1 0
0 3 6 7 0 0 | 7 2 4
5 2 4 1 7 6
7 4 2 4 4
1 1 4

Y aſsi auras acabado, y reſponderas, q̃ la rayz quadrada d̃.524176.es.724.como lo puedes prouar multiplicando.724.por otro tanto, y haran 524176.y la proporcion, que ay de.724.a vno, ay de.524176.a.724.y porque no te ſobro ningũa coſa, diras ſer rayz diſcreta, o pfecta, o racional,

Notemos la forma tan peculiar de efectuar estas operaciones y el entramado de cifras que aparecen bailando hasta llegar a resto nulo

Comprobación: multiplicar 7214 por sí mismo

- Extracción de raíces de números sordos:

Mueſtra ſacar r.de numeros ſordos Quando

464 Libro ſeptimo.

¶Quando hauiendo ſacado rayz de algun nu-
mero ſobrare algo,pondras lo que ſobrare ſobre
vna raya,y doblaras la rayz d̄l tal numero,y aña
dele vno,y poner lo has debaxo por denomina
dor.Exemplo.La rayz de.27. es.5. y ſobran dos,
pon los dos que ſobran ſobre vna raya , y dobla
los.5.que vinieron por rayz,y añadeles vno,y ſe
ran.11.los quales pondras debaxo de los.2.y aſsi
diras que la rayz quadrada imperfecta , o irra-
cional de.27.es.5.y dos onzenes.

Nota que no puede ſobrar tanto como el du
plo de la rayz y mas vno:la razõ dello pone Eu-
clides en la octaua del noueno.

$$\sqrt{27} \sim 5 + \frac{2}{11} \to a + \frac{A - a^2}{2a + 1}$$

$\sqrt{52\ 41\ 76}$	7 2 4	(operaciones)
49	14 2•2 = 284	(34/14= 2,...)
03 4,1	144 4•4 = 5776	(577/144= 4,...)
2 8 4		
0 5 7 7,6		
5 7 7 6		
0 0 0 0		

Nuestro esquema actual:

Es el mismo que daba ya Pérez de Moya en su tiempo, pero con mejoras en la multiplicación y presentación de los dígitos en la tabla.

¿Qué se esconde detrás de este procedimiento? ¿Cómo podríamos justificar este método? A través del binomio de Newton.

$\sqrt{52\ 41\ 76}$	7 2 4	(operaciones)
49	14 2•2 = 284	(34/14= 2,...)
03 4,1	144 4•4 = 5776	(577/144= 4,...)
2 8 4		
0 5 7 7,6		
5 7 7 6		
0 0 0 0		

2ª cifra: $524176 = (700 + 10x)^2 = 490000 + 2 \cdot 700 \cdot 10x + 10^2x^2 \rightarrow 34176 = x(14000 + 100x); x = 34176/(14000 + 100x) < 34176/14000 = 34{,}176/14 \sim 2$

Elegimos 2 como segunda cifra: Entonces, volviendo a la ecuación anterior, $x(14000 + 100x)$ se convierte en $2 \cdot (14200) = 28400$, por eso en la tabla se ha puesto $142 \cdot 2 = 284$

3ª cifra:

$524176 = (720 + y)^2 = 518400 + 2 \cdot 720 \cdot y + y^2 \rightarrow 5776 = y(1440 + y)$; $y = 5776/(1440 + y) < 5776/1440 = 577{,}6/144 \sim 4$ Elegimos 4 como tercera cifra: Volviendo al término $y(1440 + y)$, obtenemos $4 \cdot (1440 + 4) = 4 \cdot 1444 = 5776$

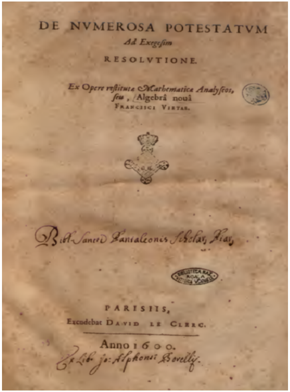
Y encontramos la raíz exacta 724.

Exposición histórica del asunto:

- De numerosa potestatum, ad exegesim resolutione
  Viète(1540-1603), 1600.
- Dos partes:
  1. De numerosa potestatum. Purarum resolutione
  2. De numerosa potestatum. Adfectarum resolutione
- Resolución de potencias puras:
  Cinco ejemplos, desde la raíz cuadrada hasta la sexta.

Potencias puras: ejemplos

De numerosa potestatum


DE NVMEROSA POTESTATVM
Ad Exegesim
RESOLVTIONE.

Ex Opere restitutæ Mathematicæ Analyseos, seu, Algebrâ nouâ
FRANCISCI VIETAE.

Bibl. Sancti Pantaleonis Scholar. Piar.

PARISIIS,
Excudebat DAVID LE CLERC.
Anno 1600.
Ex Lib. Jo: Alphonsi Borelly.

Proponatur 1 *Q* æquari 29, 16.

Proponatur 1 *C* æquari 157, 464.

Proponatur *1 Q Q* æquari 331, 776.

(Purarum resolutione)

- Resolución de raíces mediante tablas.
- Ejemplo: Problema II, extracción de la raíz cúbica de 157,464; tabla con el mecanismo de cálculo.


Paradigma Analyseos Cubi puri.

I Eductio lateris singularis primi.

II Eductio lateris singularis secundi

Parte II
Un problema de aproximación por defecto y por exceso

- Extracción de raíces cuadradas, aproximación: $\sqrt{2}$ (Problema I). Tras obtener la raíz cuadrada de 2,916 (exacta, igual a 54), comenta cómo proceder cuando la raíz es irracional:

> Quod si summa Planorum non fuisset æqualis residuo, sed eo minor, Argumentum esset Quadrati latere asymmetri. Ideo non explicabitur, sed notam asymmetriæ exhibendo, quando 1 Q æquabit 2, & quæretur 1 N, dicetur esse L. 2.
>
> Sed si quæratur proxima vero radix ex 2, elicietur latus proximum vero, & est 1 & residuum adplicabitur ad duplum lateris inuenti, & uti fragmentum adijcietur lateri inuento. Itaque numeri 2 radix dicetur esse 1 $\frac{1}{2}$ eáque maior verâ. Vel denominatori adijcietur vnitas. Itaque dicetur radix esse 1 $\frac{1}{3}$ eáque minor verâ. Media autem radix inter vtramque 1 $\frac{5}{12}$ bene proxima veræ.

- Nos dice que $1+\frac{1}{3}<\sqrt{2}<1+\frac{1}{2}$
  ¿Qué fórmula está proponiendo Viète? Aproximación por defecto y por exceso $A+\frac{b}{2A+1}\sqrt{A^2+b}<A+\frac{b}{2A}$
- Además, afirma que $1+\frac{5}{12}$ es mejor aproximación, "bene proxima veræ". ¿Cómo se ha obtenido ese valor? $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Parte II
Un problema de aproximación por defecto y por exceso

9

Quod ſi dum cedunt non ~~ſuperſit aliquod addictum Poteſtati~~ punctum, argumentum eſt magnitudinis reſoluendæ latus eſſe irrationale. ~~Collecto itaque late-~~ri adiungitur fragmentum cuius numerator eſt numerus è magnitudine reſolutâ reliquus. Diuiſores iidem, qui eſſent ſi aliquod punctum Poteſtati addictum ſupereſſet reſoluendum, & tale fragmentum ſingularium laterum ſummæ adiunctum facit latus Poteſtatis reſolutæ maius vero. Et ſi denominatori addatur vnitas, facit latus minus vero. In diuiſoribus enim ineſt implicitè latus, quod alioqui proximè eſſet eliciendum, vt pote productâ per numerales circulos eâ quæ reſoluitur, Poteſtate, & continuato opere. At illud conſtat neceſſe eſt intra denarij metam, alioquin ritè non fuit operatum.

(9) Pero si, aunque fuera menor, no quedaran puntos sobrantes, entonces es claro que la raíz es irracional. A la raíz completa que hemos obtenido le añadiremos una fracción cuyo numerador es el resto que nos queda por resolver del término inicial, y cuyo denominador será el divisor que obtendríamos si se añadiera otro punto al término a resolver. Esta fracción añadida a la raíz completa (ya obtenida) da una solución mayor que la verdadera. Si en la segunda potencia, el denominador es aumentado en uno, nos da una raíz más pequeña que la verdadera. La raíz está implícitamente entre estos divisores.

$$\text{Raíz entera} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}+1} < \text{Solución} < \text{Raíz entera} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}$$

Aquí: Divisor$=2A$ (raíz cuadrada); $3A^2+3A$(raíz cúbica); $4A^3+6A^2+4A$ (raíz cuarta);...

Después, en los comentarios a la extracción de raíces cúbicas (Problema II), nos ofrece otra forma de hacer la aproximación de raíces cúbicas irracionales: añadiendo grupos ternarios de ceros.

Quod si summa solidorum non fuisset æqualis residuo, sed eo minor, argumentum esset Cubi latere à

B ij

asymmetri. Ideò non explicabitur sed notam asymmetriæ exhibendo, Quando 1 C *æquabitur* 2 *& quæritur* 1 *N, dicetur esse* 1 *C*.2.

Sed si quæratur Radix proxima vera, adiungentur proposito Cubo terni numerales circuli in infinitum, & ex ita extenso eruetur radix tanquam ex accurato numero Cubo. Vt si quæratur de latere Cubi 2, *Ex Cubo* 2,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000 *elicietur latus* 125, 992, 104, 989. *Itaque* 1 *C.* 2. *dicetur adæquare proxime* 1 $\frac{25,992,104,989}{100,000,000,000}$ *& amplius. Sic* 1 *C.* 4. *adæquat* 1 $\frac{58,740,105,196}{100,000,000,000}$ *& amplius.*

En la edición de 1600, al estimar el valor de $\sqrt[4]{20000}$ (Problema III), Viète nos da

Itaque si 1 *QQ æquetur* 33,1776 *fit* 1 *N* 24 *Ex retrogradâ, quæ omnino obseruata cernitur, compositionis viâ.*

Quod si 1 *QQ æquetur* 20000. *Quoniam* 20000 *non est Quadrato-quadratus numerus, accuratè, latus elicietur proximum vero, adiectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & erit* 11 $\frac{5359}{6095}$ *latus, minus vero vel* 11 $\frac{5359}{6094}$ *maius vero. Medium vero satis accuratum* 11 $\frac{10718}{12089}$

Divisor $d = 4A^3 + 6A^2 + 4A,\ A = 11,\ d = 6094$

$$11 + \frac{5359}{6095} < \sqrt[4]{20000} < 11 + \frac{5359}{6094}$$

$$11 + \frac{10718}{12089}$$

Comprobaciones

$$11 + \frac{5359}{6095} < \sqrt[4]{20000} < 11 + \frac{5359}{6094}$$

$$11 + \frac{5359}{6095} = 11{,}87924528301887 < \sqrt[4]{20000} = 11{,}89207115002721$$

¡PERO
$\sqrt[4]{20000} = 11{,}89207115002721 > 11 + \frac{5359}{6094} = 11{,}87938956350509$!

Y, por tanto, la solución intermedia tampoco mejora la aproximación,

$$11 + \frac{10718}{12189} = 11{,}87931741734351$$

Tengamos en cuenta estas consideraciones numéricas:

$$\begin{aligned} 20000 &= 11^4 + 5359, \\ 6094 &= 12^4 - 11^4 - 1. \end{aligned}$$

En general, para calcular $\sqrt[4]{N}$:

$$\begin{aligned} N &= A^4 + R, \\ d &= (A+1)^4 - A^4 - 1, \\ \sqrt[4]{N} &\approx A + \frac{R}{d}. \end{aligned}$$

d: divisor en la aproximación
Ejemplo: $\sqrt[4]{20000} = 11 + \frac{5359}{6094}$

Parte II
Un problema de aproximación por defecto y por exceso

En la edición de 1646 de van Schooten, de 1646, el precepto 9 se mantiene igual; pero, al aproximar $\sqrt[4]{20000}$ encontramos una diferencia en la redacción del texto: tras añadir grupos de ceros, como Viète, aproxima por defecto y por exceso del modo siguiente:

Itaque si 1 Q Q, æquetur 33, 1776. fit 1 N 24. Ex retrograda, quæ omnino observata cernitur, compositionis via.

Quod si 1 Q Q, æquetur 20000. Quoniam 20000 non est quadrato-quadratus numerus accurate, latus elicietur proximum vero, adjectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & erit 11 $\frac{8,917}{10,000}$ latus minus vero, vel 11 $\frac{8,918}{10,000}$ latus majus vero. Medium satis propinquum 11 $\frac{3,567}{4,000}$.

$$11 + \frac{8917}{10000} < \sqrt[4]{20000} < 11 + \frac{8918}{10000}$$

aproximación intermedia: $11 + \frac{3567}{4000}$

$11 + \frac{8917}{10000} < \sqrt[4]{20000} < 11 + \frac{8918}{10000}$

- ⋆ Por el comentario de van Schooten, parece que el valor $11 + \frac{8917}{10000} = 11{,}8917$, por defecto, se ha obtenido añadiendo grupos cuaternarios de ceros: $0000, 0000, \ldots$
- ⋆ Intuimos que la idea de aproximar por exceso consiste ahora en añadir una unidad a la última cifra obtenida. Pero el valor presentado $11 + \frac{8918}{10000}$ es incorrecto, sigue siendo una aproximación por defecto.
- ⋆ Como Viète, van Schooten les aplica la regla de Chuquet para obtener un valor intermedio:

$$\frac{8917 + 8918}{10000 + 10000} = \text{(simplificando)} = \frac{3567}{4000}$$

$11 + \frac{8917}{10000} < \sqrt[4]{20000} < 11 + \frac{8918}{10000}$

- ⋆ F. van Schooten no menciona el porqué del pequeño cambio que hay en el texto.
- ⋆ En la literatura, no hemos encontrado mención alguna a este cambio; de hecho en el libro de Witmer, *The Analytic Art*, ni siquiera se traducen los problemas III y IV, sólo se indica que su tratamiento es análogo a los problemas anteriores.

Viète, 1600:

Itaque si 1 *QQ æquetur* 33,1776 *fit* 1 *N* 24 *Ex retrogradâ, quæ omnino obseruata cernitur, compositionis viâ.*

Quod si 1 *QQ æquetur* 20000. *Quoniam* 20000 *non est Quadrato-quadratus numerus, accuratè, latus elicietur proximum vero, adiectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & erit* II $\frac{5359}{60095}$ *latus, minus vero vel* II $\frac{5359}{60094}$ *maius vero. Medium vero satis accuratum* II $\frac{10718}{121189}$

van Schooten, 1646:

Itaque si 1 *QQ, æquetur* 33, 1776. *fit* 1 N 24. *Ex retrograda, quæ omnino observata cernitur, compositionis via.*

Quod si 1 *QQ, æquetur* 20000. *Quoniam* 20000 *non est quadrato-quadratus numerus accurate, latus elicietur proximum vero, adjectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & erit* 11 $\frac{8,917}{10,000}$ *latus minus vero, vel* 11 $\frac{8,918}{10,000}$ *latus majus vero. Medium satis propinquum* 11 $\frac{3,567}{4,000}$.

Parte II
El precepto de Viéte: un problema de conteo

Ante lo comentado en el apartado anterior, cabe preguntarse cuándo se cumple que el precepto de Viète sigue siendo válido, en función del índice n de la raíz buscada, de la parte entera A de la solución, del divisor d y del resto R,

$$\sqrt[n]{A^n + R} \approx A + \frac{R}{d},$$

$$d = (A+1)^n - A^n - 1 = nA^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2} + \cdots + nA$$

¿Para cuántos y qué valores de R tendremos que $A + \frac{R}{d}$ es una verdadera aproximación por exceso de $\sqrt[n]{A^n + R}$, para $0 < R \leq d$?

P.J. Herrero Piñeyro, A. Linero Bas, Mª Rosa Massa Esteve, A. Mellado Romero
A problem on the approximation of n-roots based on the Viète's work
MATerials MATemàtics. Volum 2023, treball no. 5, 27 pp. ISSN: 1887-1097
www.mat.uab.cat/web/matmat

Thomas Fantet De Lagny (1660-1734)

"Cuando Thomas Fantet de Lagny estaba muriéndose y ya no era consciente de lo que había a su alrededor, su amigo Maupertius, para comprobar si su espíritu estaba allí todavía, le preguntó, "¿Cuál es el cuadrado de 12?" "144", fue la respuesta clara. Estas fueron sus últimas palabras."

Martin A. Nordgaard
Notes on Thomas Fantet de Lagny
National Mathematics Magazine Vol. 11, No. 8 (1937), pp. 361—373

- Empezó a estudiar Derecho en Toulouse, pero a los 18 años se marcha a París.
- El trabajo de 1691 del que hablaremos le permitió su entrada en 1695 en la Academia Real de Ciencias, su sueño hecho realidad.
- En 1697, profesor real de hidrografía en Rochefort. Hizo un viaje por el océano para aprender pilotaje y ciencia marina.
- Más información en https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagny/
- "Méthode nouvelle infiniment générale et infiniment abrégée pour l'extraction des racines quarrées, cubique" (1691)

MÉTHODE NOUVELLE
INFINIMENT GÉNÉRALE
ET
INFINIMENT ABRÉGÉE,

Pour l'Extraction des Racines quarrées, cubiques, &c. & pour l'Aproximation des mêmes Racines à l'infini dans toutes sortes d'égalitez.

Proposée à examiner aux les Mathématiciens de l'Europe.

Par Mr DE LAGNY.

A PARIS,
De l'Imprimerie d'ANTOINE LAMBIN, ruë S. Jacques, au Miroir.

M. DC. XCI.
AVEC PERMISSION.

- Journal des Scavans, 14 Mai, 1691. Nouvelle Methode de Mr. T. F. de Lagny pour l'approximation des racines cubiques, pp. 200-203.
- Se presentan sin demostración dos métodos para aproximar raíces cúbicas, a saber

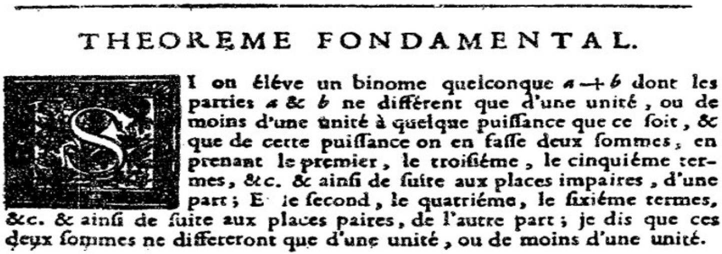
$$\sqrt[3]{a^3+b} \sim \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{b}{3a}}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b} \sim a + \frac{ab}{3a^3+b}$$

- En la nota del Journal no se da ninguna demostración de las aproximaciones, hay que esperar a que De Lagny las presente en el opúsculo que se publica en diciembre de ese mismo año 1691, y luego reedita en junio de 1692.

Base del método

El método se basa en la observación de que, si x e y se diferencian en una unidad o en menos, entonces la diferencia de las sumas de los términos impares del binomio $(x+y)^n$ menos la suma de sus términos pares es menor o igual que una unidad (¿por qué? observemos que esa diferencia no es otra cosa que $(x-y)^n$).



THEOREME FONDAMENTAL.

SI on éléve un binome quelconque $a+b$ dont les parties a & b ne différent que d'une unité, ou de moins d'une unité à quelque puiſſance que ce ſoit, & que de cette puiſſance on en faſſe deux ſommes, en prenant le premier, le troiſiéme, le cinquiéme termes, &c. & ainſi de ſuite aux places impaires, d'une part ; Et le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme termes, &c. & ainſi de ſuite aux places paires, de l'autre part ; je dis que ces deux ſommes ne differeront que d'une unité, ou de moins d'une unité.

De este modo, si a es una aproximación por defecto de $N = \sqrt[p]{a^p + b}$, con $a \leq N \leq a + 1$, De Lagny buscará que la solución sea del tipo $\frac{1}{2}a + x$, de modo que $\frac{1}{2}a$ y x se diferencian en una unidad o menos. Como $a^p + b = \left(\frac{1}{2}a + x\right)^p$, De Lagny propone que

- la suma de los lugares impares del binomio valga $\frac{1}{2}a^p + \frac{b}{2}$
- la suma de los lugares pares del binomio valga $\frac{1}{2}a^p + \frac{b}{2}$

En el caso de raíces cúbicas, esto supone plantear las ecuaciones

$$\begin{cases} (I): \ \frac{1}{2}a^3 + \frac{b}{2} = \frac{1}{8}a^3 + \frac{3}{2}ax^2 \\ (P): \ \frac{1}{2}a^3 + \frac{b}{2} = \frac{3}{4}a^2x + x^3 \end{cases}$$

Despejando directamente x en (I) se obtiene la aproximación "irracional" $\sqrt[3]{a^3 + b} \sim \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{b}{3a}}$, mientras que la aproximación "racional" $\sqrt[3]{a^3 + b} \sim a + \frac{ab}{3a^3+b}$ se consigue despejando x mediante reducción, a saber, multiplicando (I) por $\frac{2}{3}ax$ y restando (P).

Parte II
Thomas Fantet de Lagny

rera de $3aab + b^3$. au plus d'une unité. Soit $a \propto 2$. $b \propto 3$. on aura $a^3 + 3abb \propto 62$. & $3aab + b^3 \propto 63$. où il est clair que 63. ne surpasse 62. que d'une unité. Si on avoit pris $a \propto 2\frac{1}{2}$ & $b \propto 3$. on auroit $a^3 + 3abb \propto 83\frac{1}{8}$ & $3aab + b3 \propto 83\frac{1}{8}$ qui ne diffère que de $\frac{1}{8}$ qui est beaucoup moins d'une unité ; ce qui arrive toûjours lors que $a\,b$. est moindre que l'unité.

PREMIER PROBLEME.

Pour l'Approximation.

APprocher à l'infini de la Racine d'une puissance imparfaite, & en approcher plus en une minute qu'on ne le peut faire en plusieurs heures, & même en plusieurs jours par les Methodes connuës jusqu'à présent.

Soit 1. la puissance imparfaite quelconque $a^p + b$. où p marque l'exposant quelconque de la puissance A, le plus grand nombre entier par lequel on peut exprimer la Racine, & b l'excés en nombres entiers du nombre donné sur la puissance d'A. Elevez le binome $\frac{1}{2}a + x$ à la puissance p. & faites-en deux sommes, en prenant les termes alternatifs. Egalez chacune de ces sommes à $\frac{1}{2}a^p. + \frac{1}{2}b$. moitié de la puissance donnée : & comme vous aurez toûjours deux égalitez & une seule inconnuë x, & que les hautes puissances de ces deux égalitez ne se surpassent dans leur exposant que de l'unité, vous aurez toûjours une valeur de x rationelle, qui étant ajoûtée à $\frac{1}{2}a$ vous donnera une valeur indéfiniment approchée de la Racine cherchée. Que si vous résolvez séparément une de ces deux égalitez, vous aurez une valeur de x irrationelle, mais d'un, ou de plusieurs degrez moins élevée ; ce qui peut être de grand usage dans la Geométrie. Si au lieu de $x^p \propto$ nombre entier $a^p + b$ on a une égalité avec des termes moyens, la méthode est la même ; ce qui abrége infiniment toute l'Analyse.

Chaque operation particuliére suffit pour établir une formule générale pour chaque puissance particuliére.

Exemple général sur le Cube.

Soit le nombre donné $a^3 + b$. Je suppose $\frac{1}{2}a + x$ que je cube, c'est $\frac{1}{8}a^3 + \frac{3}{4}aax + \frac{3}{2}axx + x^3$ dont je fais deux sommes $\frac{1}{8}a^3 + \frac{3}{2}axx \propto \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b$. & $\frac{3}{4}aax + x^3 \propto \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b$. en résolvant la pre-

miére, je trouve la formule irrationelle que j'ay donnée dans le Journal du 14. May $\frac{1}{2}a + R.\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}$; mais en les comparant ensemble selon la méthode ordinaire des Problemes indéterminez, je trouve ma seconde formule du même Journal $a + \frac{a^3b}{3a^3 + b}$.

Exemple en Nombres.

Soit le cube imparfait proposé 959. 985. 256. sa Racine approchée est 986. ou 987. Si on prend la premiére, on erre de quatorze cens mille unitez dans le cube. Si on prend la seconde, on errera de plus de quinze cens mille, quoy qu'il n'y ait que trois chifres dans la Racine. Et pour errer de moins d'une unité, il faut ajoûter au moins vingt un zero, & continuer l'extraction cubique sur ce nombre solide 1400000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. ce que le plus habile Calculateur ne sçauroit entreprendre en deux heures, au lieu que par ma Methode on n'a qu'à faire une multiplication du reste ou excés 1400000. par la Racine 986. & garder le produit pour numerateur 1380400000. Et pour avoir le dénominateur, il n'y a qu'à ajoûter au triple du cube donné de 986. l'excés 1400000. & la somme 2877155768. sera le dénominateur, & ajoûtant cette fraction réduite si l'on veut aux nombres de la dixme, on aura une Racine dont le cube sera entre 959 985 256. & 959 985 255. & la régle est générale, & la Racine n'erre que d'environ $\frac{1}{3000.000.}$. Pour se convaincre de l'excellence de la Nouvelle Methode le Lecteur n'a qu'à prendre la plume à la main, & faire les deux calculs. Or quoy que sur un pareil nombre de chifres l'avantage ne soit pas toûjours si grand, il est toûjours immense & prodigieux. Et si la Racine a seulement cinq ou six figures, on ne sçauroit s'imaginer combien elle abrége, à moins que d'en faire l'expérience.

Que si on redouble l'opération, c'est-à-dire que supposant $a + \frac{a^3b}{3a^3 + b} \propto d$, & le nombre proposé $d^3 + c$ on prenne pour Racine $d + \frac{d^3c}{3d^3 + c}$, l'Approximation [a] sera comme infinie, & cecy doit être entendu pour toutes les puissances & pour toutes les égalitez, tant pures qu'affectées.

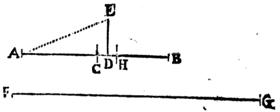
Il est aisé de déterminer en lettres, & universellement les termes d'aproximation pour chaque opération ; c'est ce que nous donnerons au long dans nôtre Arithmetique infiniment abregée, qui renfermera quantité d'autres nouvelles découvertes sur les nombres, & il faut prendre garde que je prens le mot d'*Infiniment* à la rigueur Geométrique.

[a] On peut continuer cette approximation à l'infini par des formules abregées ; mais pour peu que les nombres donnez soient grands, il suffit d'en faire une ou deux au plus.

Algunos ejemplos de De Lagny:

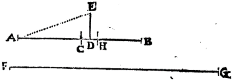
$$\sqrt[3]{2353} = \sqrt[3]{13^3 + 156} \sim 23 + 25/63$$
$$\sqrt[3]{2,000,000} = \sqrt[3]{125^3 + 46875} \sim 62{,}5 + \sqrt{4031 + 1/4}$$

Este último ejemplo lo usa para dar una aproximación geométrica al problema de duplicar un cubo de lado 100.



Aproximación geométrica: duplicación del cubo de lado 100.

Soit donc la ligne donnée A B, & qu'il en faille trouver une dont le cube soit double à moins d'une deux millioniéme prés. Il n'y a qu'à exprimer en ligne la valeur du binome 25+R645, ce qui se peut faire en cette maniere. Divisez A B en deux parties égales au point C. Prenez C D egale au quart, & D H egale à la cinquieme partie de C B. Elevez D E perpendiculaire moyenne entre C D & D H, & joignez A E. Prenez F G egale à A C+A E, il dit que le cube de F G sera double de celui de A B, à moins d'une deux millionieme prés.



Ce problême est resolu avec plus de facilité que plusieurs

1691. Eee

Dividir AB en dos partes iguales en el punto C; tomar CD igual a la cuarta parte de CB; tomar DH igual a la quinta parte de CB (a partir de D, cuidado); elevar la media (geométrica) perpendicular entre CD y DH, y unirle AE. Se toma FG igual a AC + AE.

De esta forma, si AB$=40$, se puede obtener que FG$=25+\sqrt{645}$, y calculando convenientemente se puede ver que la razón $100/(62{,}5+\sqrt{4031+1/4})$ es igual a $40/(25+\sqrt{645})=AB/FG$.

Edmond Halley (Haggerston, 1656 – Greenwich, 1742)

- Su padre se esforzó en darle una buena educación; entra en Queen's College Oxford en 1673; ya es un experto astrónomo, con una valiosa colección de instrumentos que su padre le había comprado.
- Asistente del astrónomo real Flamsteed.
- En 1676 viaja a la isla de Santa Elena, en el Atlántico.
- En 1680 observa el cometa que llevará su nombre, cerca de Calais, cuando viajaba con un amigo hacia París, en donde con Cassini hizo nuevas observaciones para determinar su órbita.
- En 1720 se convierte en Astrónomo Real.
- Dos cráteres, uno en la Luna y otro en Marte, llevan su nombre.

Sobre Halley:

- Aunque no tuviese un puesto académico "fijo", Halley no se quedó atrás en cuanto a obra científica.
- Trabajó para la Royal Society, de la que era "Fellow" desde 1678, en diferentes ocupaciones. Por ejemplo, fue editor de Philosophical Transactions desde 1685 hasta 1693.
- De forma frecuente, publicó en las revistas de la sociedad resultados importantes; por citar algunos: 1686 Halley publica lo que se puede considerer la primera carta meteorológica, mostrando los vientos predominantes en cada océano; 1693, trabajo innovador, dando unas tablas de mortalidad, siendo uno de los primeros en relacionar la mortalidad y la edad, y siendo muy influyente en la futura producción de tablas para seguros de vida.
- En nuestro contexto encontramos
  "Methodus nova accurata et facilis inveniendi radices aequationum quarumcumque generaliter, sine praevia reduction", Philosophical Transactions 18 (1694), 136-148

Parte II
Edmund Halley

(136)

Methodus Nova Accurata & facilis inveniendi Radices Æquationum quarumcumque generaliter, ſine prævia Reductione. Per Edm. Halley.

ARtis Analyticæ præcipuus quidem uſus eſt Problemata Mathematica ad æquationes perducere, eaſque terminis quantum fieri poſſit ſimpliciſſimis exhibere. Ars autem iſta manca quodammodo, nec ſatis Analytica merito videretur, niſi Methodi quædam ſubminiſtrarentur, quarum ope Radices, ſive Lineæ ſive Numeri ſint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine Problemata ſoluta dare.

Veteribus ſane vix quicquam ſupra Quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero ſcripſere de Solidorum Problematum Effectione Geometricâ ope Parabolæ, Ciſſoïdis, aliuſve Curvæ, particularia tantum ſunt, ac caſibus particularibus deſtinata; de Numericâ vero Extractione ubique altum ſilentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præſtamus, modernorum inventis fere totum debetur.

Ac primus quidem ingens ille Algebræ hodiernæ repertor ac reſtaurator *Franciſcus Vieta*, annis abhinc circiter centum, Methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque ſub titulo *De Numeroſâ poteſtatum ad Exegeſin Reſolutione* publico donavit, *ubique* ut ait *obſervando retrogradam Compoſitionis viam*. Hujuſque Veſtigiis inſiſtentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam noſtrates tam extranei, quæcunque de hac re ſcriptis mandarunt, à *Vietâ* deſumpta debent agnoſcere. Qualia vero in hoc negotio præſtiterit ſagaciſſima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractiore Specimine à Clariſſimo *Walliſio*, Cap. XCIV. Algebræ ſuæ, edito,

TRACTS

ON THE

Reſolution of Affected Algebräick Equations

BY

DR. HALLEY'S, MR. RAPHSON'S,

AND

SIR ISAAC NEWTON'S,

METHODS OF APPROXIMATION.

PUBLISHED BY

FRANCIS MASERES, Eſq. F.R.S.

CURSITOR BARON OF THE COURT OF EXCHEQUER.

LONDON:

PRINTED BY J. DAVIS, CHANCERY-LANE;

AND SOLD BY J. WHITE, FLEET-STREET.

1800.

Halley sabe del trabajo de De Lagny, pero no encuentra el libro de De Lagny (1692; no obstante, se sabe que estuvo en la biblioteca de Newton); por eso se determina, impresionado por la fórmula, a dar una prueba de la aproximación de las raíces quintas. Su prueba difiere ligeramente de la prueba de De Lagny, pero están conectadas por el binomio de Newton y un habilidoso manejo de sus términos.

* The general expreſſions for theſe values of the root of any given number are as follows. Let the given number be called N, and (m being any whole number whatſoever,) let a near value of it's mth root that is leſs than the truth be called a. Then will the mth root of the given number N be very nearly equal either to the rational expreſſion $a + \frac{2a \times \overline{N - a^m}}{\overline{m-1} \times N + \overline{m+1} \times a^m}$, or to the irrational expreſſion $a + \sqrt{\frac{aa}{\overline{m-1}|^2} + \frac{2 \times \overline{N - a^m}}{m \times \overline{m-1} \times a^{m-2}}} - \frac{a}{m-1}$; as is ſhewn at large in my Explanation of Monſieur de Lagny's method of extracting the Roots of Numbers, publiſhed with other Mathematical Tracts in a large octavo volume, in the year 1795, pages 507, 508, &c, 516. F. M.

$$\boxed{a + \frac{2a(N - a^m)}{(m-1)N + (m+1)a^m}}$$

$$\boxed{a - \frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a}{m-1}\right)^2 + \frac{2(N - a^m)}{m(m-1)a^{m-2}}}}$$

Propuesta:

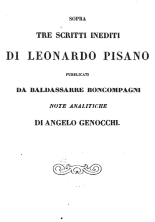
- Leonardo de Pisa y su *Flos*
- Un problema astronómico. Ulugh Beg
- Siglo XVI: Chuquet, Cardano, Stevin
- Los métodos de Newton y Halley
- Método de las cascadas de Rolle

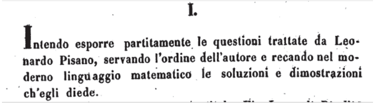
Obras conocidas de Leonardo de Pisa:

- Liber Abaci (1202, 1228)
- Practica Geometriae (1220)
- Liber Quadratorum (1225)
- Epistola ad magistrum Theodorum (1225)
- Flos (1225)

Baldassarre Boncompagni:

- Opuscoli di Leonardo Pisano (primera edición, 1854)
- Tomado de un códice de la Biblioteca Ambrosiana de Milán, del siglo XV.
- La primera edición contenía algunos errores, como observó Angelo Genocchi, quien en 1855 publicó “Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni”, Belle Arti, Roma, con notas matemáticas sobre los contenidos y trasladando las cuestiones a lenguaje matemático.


SOPRA
TRE SCRITTI INEDITI
DI LEONARDO PISANO
PUBBLICATI
DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI
NOTE ANALITICHE
DI ANGELO GENOCCHI.


I.

Intendo esporre partitamente le questioni trattate da Leonardo Pisano, servando l'ordine dell'autore e recando nel moderno linguaggio matematico le soluzioni e dimostrazioni ch'egli diede.

Segunda edición, 1856, corrección de errores

OPUSCOLI

DI

Leonardo Fibonacci, called

LEONARDO PISANO

PUBBLICATI

DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SECONDO LA LEZIONE

DI UN CODICE DELLA BIBLIOTECA AMBROSIANA DI MILANO

SECONDA EDIZIONE

FIRENZE

TIPOGRAFIA GALILEIANA

di M. Cellini e C.

1856

INCIPIT *flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam uel ad utrumque pertinentium.*

← Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

↑

ALtera uero questio á predicto magistro Iohanne proposita fuit vt inueniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent uiginti; super hoc meditando putaui huiusquestio-

Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum, phylosophum domini Imperatoris.

Incipit liber quadratorum compositus à leonardo pisano. Anni. M. CC. XXV.

☐ Comenta que, para comprender bien el problema, ha acudido al Libro X de los Elementos de Euclides, y explica brevemente lo que aparece en sus XV proposiciones

☐ Con ese estudio ve que la solución no se ajusta a ninguno de los irracionales tratados en el Libro X de los Elementos de Euclides, así que no puede ser fracción, ni entero, ni la raíz de una fracción, ni la raíz de la raíz de una fracción, ...

ctis essent uiginti; super hoc meditando putaui huiusquestionis solutionem egredi ex his que continentur in. x.° lib.° Euclidis, et ob hoc super ipso. x.° Euclidis accuratius studui, adeo quod sinteoręmata ipsius memorie commendaui, et ipsarum intellectum comprehendi. Et quia difficilior est

Et cum studiose super hos quindecim numeros, et super eorum diuersitates cogitarem, inueni nullum ipsorum congruere posse uni ex. x. radicibus supradictis, que cum duobus quadratis et cubo sint. xx. ut in sequentibus geometrice demonstratur.

nis, et fractiones fractionis fractionis. Non ergo fractus est numerus *a b*, neque integer.

☐ Y cuando ya sabe que la raíz, la línea ab, no es de ninguno de los tipos del Libro X, ...

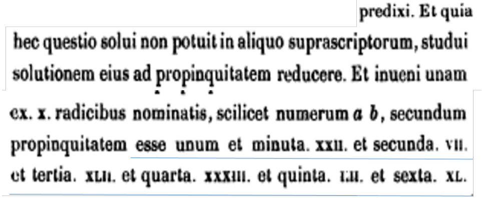
linea *a b*, ut demonstratum est, non est aliqua ex quindecim lineis, de quibus fit mentio in. x.° euclidis ut predixi. Et quia

Parte III
Leonardo de Pisa: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

☐ ... Pasa a decir que, puesto que por esa vía no se ha podido obtener la solución, entonces...

☐ ... estudia su solución mediante la reducción a sus próximos (propinquitatem reducere). Es decir, opta por una técnica de aproximación y dice que encuentra

$1 + 22/60 + 7/60^2 + 42/60^3 + 33/60^4 + 4/60^5 + 40/60^6$


predixi. Et quia
hec questio solui non potuit in aliquo suprascriptorum, studui
solutionem eius ad propinquitatem reducere. Et inueni unam
ex. x. radicibus nominatis, scilicet numerum a b, secundum
propinquitatem esse unum et minuta. xxii. et secunda. vii.
et tertia. xlii. et quarta. xxxiii. et quinta. iiii. et sexta. xl.

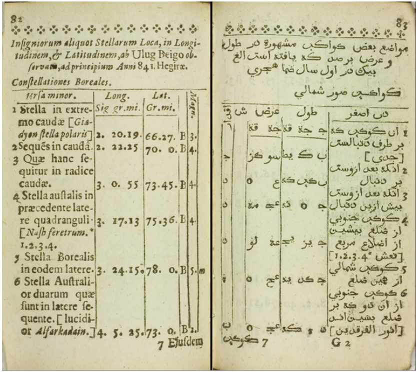
☐ Observemos que la solución exacta es $x = 1{,}368808107821373\ldots$ (con ordenador), mientras que $1{,}368808107853224\ldots =$
$1 + 22/60 + 7/60^2 + 42/60^3 + 33/60^4 + 4/60^5 + 40/60^6$.

¿Cómo pudo dar esa aproximación? No lo sabemos.
Genocchi, en sus anotaciones, sugiere la siguiente forma. Una vez que se sabe que la solución está entre 1 y 2, y que vamos a usar notación sexagesimal,
– escribimos $x = 1 + y/6$; esto conduce a $y^3 + 30y^2 + 612y = 1512$, lo que da un valor para y entre 2 y 3, así que $x = 1 + y/6 = 1 + (2 + y'/10)/6$;
– ahora se toma $y = 2 + y'/10$, y la nueva ecuación en y' tiene una solución y' entre 2 y 3, así que $x = 1 + y/6 = 1 + (2 + y'/10)/6 = 1 + 20/60 + y'/60 = 1 + 20/60 + 2/60 + (y''/6)/60$;
– a continuación, $y' = 2 + y''/6$, se obtiene $y'' = 7 + y'''/10$, después $y''' = y^{(iv)}/6$; etcétera.
Parece un trabajo muy laborioso

Ulugh Beg (1393-1449) Información sobre su biografía:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies

- Nieto del conquistador Tamerlán, de origen turcomongol.
- Formación en poesía, historia, estudio del Corán.
- Empieza a estudiar astronomía sobre 1417.
- Construye una madrasa en 1420, en donde entre otros, invita al matemático Al-Kashi (1390-1450).
- Empieza a construir años más tarde un observatorio astronómico.
- El catálogo de estrellas de Ulugh Beg fue el más preciso desde tiempos de Ptolomeo.
- Entre sus hitos, tenemos la aproximación de $\operatorname{sen}(1^{\circ})$, que comentaremos a continuación, con notación moderna.
- Su habilidad política estaba muy por debajo de la científica; en 1447 recibe el trono del imperio timúrida, pero acaba teniendo una muerte violenta a manos de su hijo.

Parte III
Ulugh Beg: Biografía



82

Insigniorum aliquot Stellarum Loca, in Longitudinem, & Latitudinem, ab Ulug Beigo *observata, ad principium Anni* 841. Hegiræ.

Constellationes Boreales.

Ursa minor.	Long. Sig gr.mi.	Lat. Gr.mi.		Magn.
1 Stella in extremo caudæ [*Giadyon stella polaris*]	2. 20.19.	66.27.	B	3.
2 Sequẽs in caudâ.	2. 22.25	70. 0.	B	4.
3 Quæ hanc sequitur in radice caudæ.	3. 0. 55	73.45.	B	4.
4 Stella australis in præcedente latere quadranguli. [*Nash feretrum.** 1.2.3.4.	3. 17.13	75.36.	B	4.
5 Stella Borealis in eodem latere.	3. 24.15.	78. 0.	B	5. m
6 Stella Australior duarum quæ sunt in latere sequente. [lucidior *Alfarkadain.*]	4. 5. 35.	73. 0.	B	2.

7 Ejusdem

83

مواضع بعض کواکب مشهورة در طول و عرض برصد که یافته است الغ بیک در اول سال ضما هجری

کواکب صور شمالي

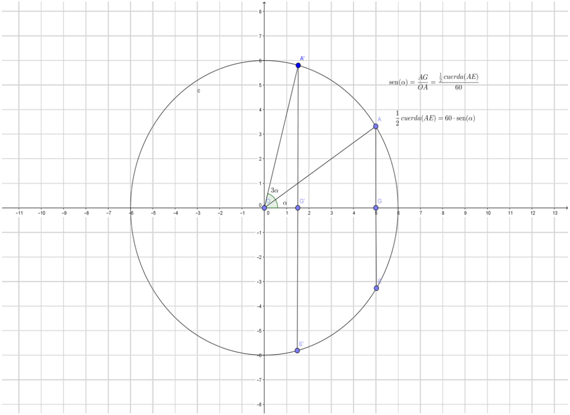
دب اصغر	طول	عرض	ش	اقدار
	ج جة قة	جة قة		
1 آن کوکب که بر طرف دنبالست [جدی]	ب ک يط	سو كز		ج
2 آنکه بعد ازوست بر دنبال	ب كب كه	ع ٥		د
3 آنکه بعد ازوست بيش ازين دنبال	ج ٥ نه	عج مه		د
4 کوکب جنوبي از ضلع بيشين از اضلاع مربع [نعش *1.2.3.4]	ج يز يج	عه لو		د
5 کوکب شمالي از همين ضلع	ج كد يه	عح ٥		ه
6 کوکب جنوبي از آن دو که بر ضلع بسين اند [انور الفرقدين]	ه ه كه	عج ٥		ب

7 کوکب

G 2

John Bainbridge & John Greaves, Canicularia.
Oxford: printed by Henry Hall, 1648.
Basado en las tablas astronómicas de Ulugh Beg.

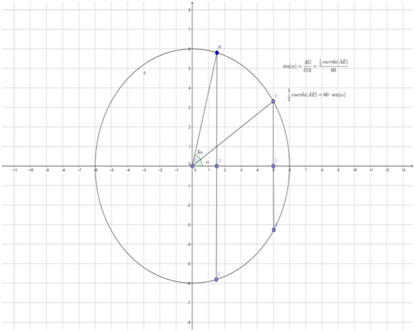
Definición de seno: El radio se divide en 60 partes



Constituyendo la ecuación:

Aplicamos la fórmula

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\operatorname{sen}(\alpha) - 4\operatorname{sen}^3(\alpha)$$



$$\frac{\frac{1}{2}cuerda(A'E')}{60} = 3\frac{\frac{1}{2}cuerda(AE)}{60} - 4\frac{\left(\frac{1}{2}cuerda(AE)\right)^3}{60^3}$$

$\downarrow$ *x=1 / 2 cuerda(AE): incógnita*

$$\frac{1}{2}cuerda(A'E') = 3x - \frac{4}{60^2}x^3$$

$\downarrow$

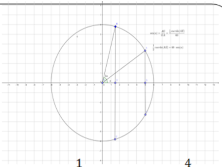
$$3x = \frac{1}{2}cuerda(A'E') + \frac{4}{60^2}x^3$$

El valor aproximado de $\operatorname{sen}(3^o)$, y, por tanto, de $1/2\operatorname{cuerda}(A'E')$, era conocido por los árabes (Abu Al-Wafa, s. X): $3;8,24,33,59,34,28,15$

Por tanto, se necesitaba resolver la ecuación

$$x = \frac{1}{2} cuerda(AE)$$

$$3x = 3;8,24,33,59,34,28,15 + 0;0,4\,x^3$$



$$3x = \frac{1}{2} cuerda(A'E') + \frac{4}{60^2} x^3$$

$$x = \frac{3;8,24,33,59,34,28,15 + 0;0,4\,x^3}{3}$$

x $60^2/4$ →

$$x = \frac{x^3 + 15\cdot 60\cdot(3;8,24,33,59,34,28,15)}{45\cdot 60}$$

$$x = \frac{x^3 + 47,6\,;8,29,53,37,3,45}{45,0;}$$

En nuestra notación decimal,

$$x = \frac{x^3 + 2827 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{53}{60^3} + \frac{37}{60^4} + \frac{3}{60^5} + \frac{45}{60^6}}{2700}$$

¿Cómo resolvieron esta ecuación?

Primer paso: Suponemos que x^3/Q es pequeño, luego la raíz será del tamaño de P/Q; hacemos $P/Q = a + R/Q$, y la primera aproximación será a.

Segundo paso: Suponemos que la solución exacta es $x = a + \beta$, con β por determinar. Como debe cumplirse $a + \beta = [(a+\beta)^3 + P]/Q$, resulta que $\beta = [(a+\beta)^3 + P]/Q - a = [(a+\beta)^3 + R]/Q$; si tomamos $(a+\beta)^3 \sim a^3$, entonces $\beta \sim [a^3 + R]/Q$. Hacemos la división $[a^3 + R]/Q = \beta + S/Q$, y la segunda aproximación vendrá dada por $x_2 = (a + b) = a + [a^3 + R - S]/Q$.

$P/Q = a + R/Q \rightarrow x_1 = a$
$[a^3 + R]/Q = b + S/Q \rightarrow x_2 = a + b = a + [a^3 + R - S]/Q$
Tercer paso: Solución exacta, $x = a + b + \gamma$, γ por determinar. Debe cumplir

$$a + b + \gamma = [(a + b + \gamma)^3 + P]/Q$$

$$\rightarrow b + \gamma = [(a + b + \gamma)^3 + P]/Q - a = [(a + b + \gamma)^3 + R]/Q$$

$$\rightarrow \gamma = [(a + b + \gamma)^3 + R]/Q - b = [(a + b + \gamma)^3 + S - a^3]/Q$$

Tomamos $(a + b + \gamma)^3 \sim (a + b)^3$, luego $\gamma \sim [(a + b)^3 + S - a^3]/Q$. Hacemos la división $[(a + b)^3 + S - a^3]/Q = c + T/Q$, y la tercera aproximación será

$$x_3 = a + b + c = a + b + [(a + b)^3 - a^3 - S - T]/Q$$

$P/Q = a + R/Q \rightarrow x_1 = a$

$[a^3 + R]/Q = b + S/Q \rightarrow x_2 = a + b = a + [a^3 + R - S]/Q$

$[(a+b)^3 + S - a^3]/Q = c + T/Q \rightarrow$
$x_3 = a + b + c = a + b + [(a+b)^3 - a^3 + S - T]/Q$

$[(a+b+c)^3 + T - (a+b)^3]/Q = d + U/Q \rightarrow$
$x_4 = a+b+c+d = a+b+c+[(a+b+c)^3 - (a+b)^3 + T - U]/Q$

$[(a+b+c+d)^3 + U - (a+b+c)^3]/Q = e + W/Q$
$\rightarrow x_5 = a + b + c + d + e =$
$a + b + c + d + [(a+b+c+d)^3 - (a+b+c)^3 + U - W]/Q$
Etcétera

Parte III
Ulugh Beg: Cálculo final de $\mathrm{sen}(1^{o})$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA: $x=(x^3+P)/Q \rightarrow$ aplicación: $x = \dfrac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0;}$

La solución será de la forma $a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots$

Primer paso

$P= 47, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45 = 2826 + 8/60 + 29/60^2 + 53/60^3 + 37/60^4 + 3/60^5 + 45/60^6$

$Q= 45, 0; =2700$

$P/Q = 1 + (2, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45)/45, 0;$

$R= 2, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45$

$P/Q= a + R/Q,$
$x_1=a$ $\rightarrow$ $x_1=1$

$1/ 45, 0; =1/ (45\text{x}60)$
$=(1+1/3)/60^2=(1+1/3)\text{x}60^{-2}$
$=60^{-2}+20 \text{ x } 60^{-3}$

Segundo paso:

Dividimos $[a^3 + R]/Q=[1 + 2, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45]/45, 0;$

$=[2, 7; 8, 29, 53, 37, 3, 45]/45, 0; = [2, 7; 8, 29, 53, 37, 3, 45]\cdot(60^{-2}+20 \text{ x } 60^{-3})$

$= 2/60 + 49/60^2 + 31/60^3 + 19/60^4+ 51/60^5 + 29/60^6 + 25/60^7$

$= 2/60 + 45\cdot60\cdot (49/60^2 + 31/60^3 + 19/60^4+ 51/60^5 + 29/60^6 + 25/60^7)/(45\cdot60)$

$= 2/60 + (37; 8, 29, 53, 37, 3, 45)/(45, 0;)$

Así que la nueva aproximación es $x_2=a + b = 1+ 2/60$ $\leftarrow$

$[a^3 + R]/Q = b + S/Q$
$x_2= a + b = a+ [a^3 + R - S]/Q$

Y para el siguiente paso se tendrá en cuenta que

$S= 37; 8, 29, 53, 37, 3, 45$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA: $x=(x^3+P)/Q \rightarrow$ aplicación: $x = \dfrac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0;}$

$x=a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots$ | $x_1 = a=1,\ x_2=a+b = 1+ 2/60$

Tercer paso

$P= 47, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45 = 2826 + 8/60 + 29/60^2 + 53/60^3 + 37/60^4 + 3/60^5 + 45/60^6$

$Q= 45, 0; =2700$

$P/Q = 1 + (2, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45)/45, 0;$

$R= 2, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45$

$S= 37; 8, 29, 53, 37, 3, 45$

$[(a+ b)^3 + S\text{-}a^3]/Q= c +T/Q$

$x_3= a+ b + c = a+ b +[(a+ b)^3 - a^3 + S - T]/Q$

Dividimos $[(a+ b)^3 + S\text{-}a^3]/Q =[(1+ 6/60 + 12/60^2 + 8/60^3)+ (37; 8, 29, 53, 37, 3, 45) - 1]/45, 0;$

$=[37; 14, 42, 1, 37, 3, 45]/45, 0; = [37; 14, 42, 1, 37, 3, 45]x(60^{-2} + 20 \times 60^{-3})$

$= 49/60^2 + 39/60^3 + 36/60^4 + 2/60^5 + 9/60^6 + 25/60^7$

$= 49/60^2 + 45x60(39/60^3 + 36/60^4 + 2/60^5+ 9/60^6 + 25/60^7)/(45x60)$

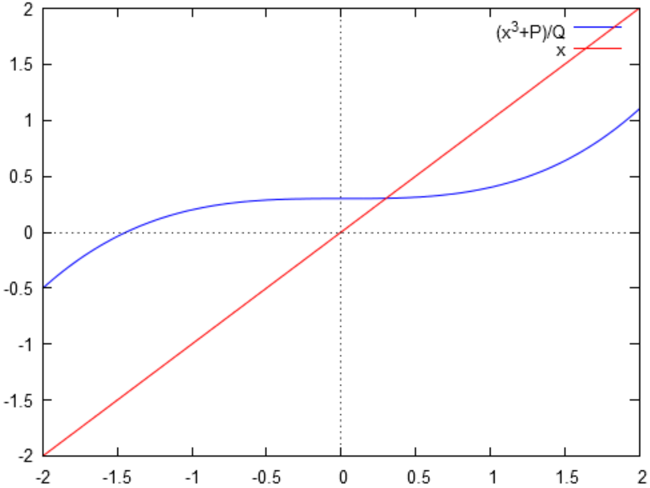
$= 49/60^2 + (0; 29, 42, 1, 37, 3, 45)/(45, 0;)= c +T/Q$

Así que la nueva aproximación es $x_3=a + b + c = \underline{1+ 2/60 + 49/60^2}$

Y para el siguiente paso se tendrá en cuenta que

$T= 0; 29, 42, 1, 37, 3, 45$

La derivada de $\frac{x^3+P}{Q}$ en el punto de corte con la diagonal (la solución buscada) está muy próxima a 0



Parte III
Tres autores

Antes de que Viète diera su método para ecuaciones afectadas en su De Numerosa Potestatum, de la que hemos hablado en la segunda parte, y del cual se derivarán algunos métodos que conocemos hoy en día (como el método de Newton-Raphson), durante el siglo XVI encontraremos diferentes métodos numéricos, que pasamos a describir:

- Chuquet, basado en una propiedad de proporciones;
- Cardano, basado en el método de doble falsa posición;
- Stevin, con un método particular de bisección del intervalo en donde se encuentra la solución buscada.

Buscamos averiguar qué métodos había en esa época, para así disponer de una panorámica sobre las herramientas utilizadas y sobre el lenguaje y la notación empleados. Con esa panorámica, intentaremos confeccionar una actividad en el aula de secundaria.

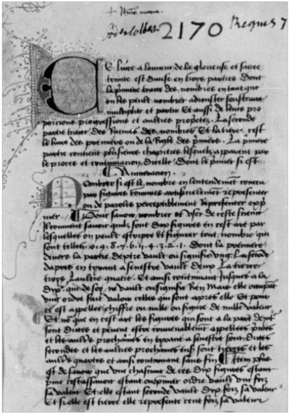
- Siglo XV: Nicolas Chuquet (París, 1445–Lyon, 1488).
  1. Nació en París; estudió medicina; vivió en Lyon.
  2. En Lyon trabajó como copista preparando documentos comerciales relacionados con las leyes.
  3. Actividad comercial de Lyon durante el siglo XV: ciudad próspera y cosmopolita; mercado de las especias.
  4. Ferias; crecimiento de la ciudad como centro de la banca; necesidad de crear una industria impresa capaz de copiar documentos comerciales y legales, especialmente en lengua francesa en lugar del latín.
  5. Necesidad de maestros con habilidades en el cálculo con los nuevos numerales indo-arábigos, más eficientes para el cálculo que el ábaco, y que además fueran capaces de comunicar sus conocimientos a otros.
  6. Chuquet se trasladó a Lyon sobre 1480; base de sus negocios tanto como copista y preparador de documentos comerciales y legales, así como maestro del nuevo arte de los numerales indo-arábigos.

- Obra que le ha dado honor y fama: un manuscrito, fechado en 1484, titulado *Le Triparty en la science des nombres*.
- Le Triparty des sciences des nombres (1484)
  1. 1ª parte: aritmética.
  2. 2ª parte: raíces y números compuestos.
  3. 3ª parte: álgebra.
- Aristide Marre, encuentra y publica una versión en francés del manuscrito de Chuquet (1880). Transcripción de la obra de Chuquet; recomendable para una lectura más rápida de los contenidos del manuscrito.

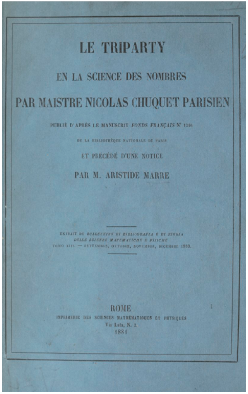
Más información en:

G. Flegg, C. Hay, B. Moss
Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician. A study with extensive translation of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484.
Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1985

Triparty, manuscrito original

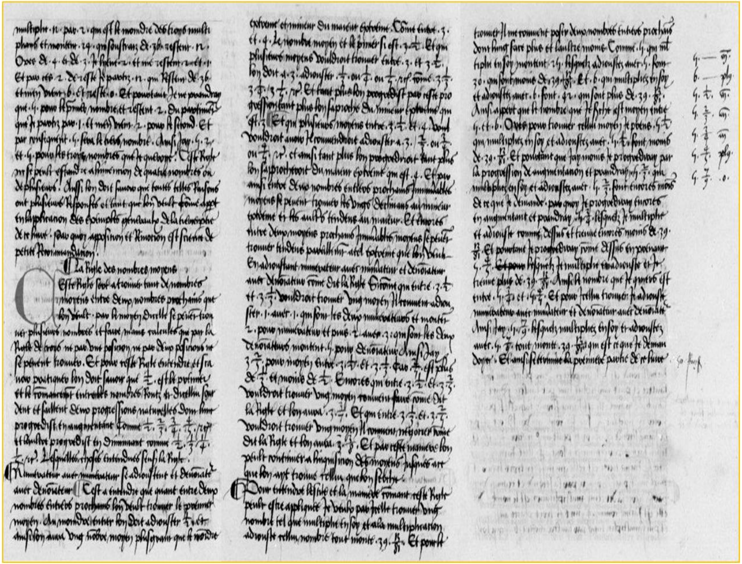


Triparty, transcripción de Marré



- Al final de la primera parte, en el cap. IV, Chuquet nos habla de su regla de los números medios ("La Rigle des Nombres Moyens").
- La aplica a la ecuación $x^2 + x = 39\frac{13}{81}$ ("Trouver ung nombre tel que multiplie en soy et a la multiplication adiouste cellui nombre tout monte $39\frac{13}{81}$").
- Encuentra que 5 y 6 son aproximaciones por defecto y por exceso, respectivamente; entonces toma la progresión ascendente $5 + \frac{1}{2}$, $5 + \frac{2}{3}$, $5 + \frac{3}{4}$, $5 + \frac{4}{5}$, ... y comprueba que para $5 + \frac{3}{4}$ obtiene un valor menor que $39\frac{13}{81}$, mientras que para $5 + \frac{4}{5}$ obtiene un valor mayor que $39\frac{13}{81}$. Por tanto, la solución estará entre $5 + \frac{3}{4}$ y $5 + \frac{4}{5}$.
- Finalmente, aplica la regla de los números medios y obtiene la aproximación $5 + \frac{7}{9} = 5 + \frac{3+4}{4+5}$, que precisamente es en realidad la solución exacta.

Parte III
Aspectos históricos: Nicolas Chuquet



Parte III
Aspectos históricos: Nicolas Chuquet

¶ La rigle des nombres moyens.

C Este rigle sert a trouuer tant de nombres moyens entre deux nombres prochains que lon veult. Par le moyen dicelle se peuēt trouuer plusieurs nombres et faire mains calcules que par la rigle de troys ne par vne posicion ne par deux posicions ne se peuent trouuer. Et pour ceste rigle entendre et scauoir pratiquer lon doit sauoir que $\frac{1}{2}$. est le premier et le coīancemt̄ entre les nombres routz et dicellui sourdent et saillent deux progressions naturelles dont lune progredist en augmentant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. ⁊c. et laultre progredist en diminuant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$ ⁊c. Lesquelles choses entendues senƒ la Regle.

¶ Numerateur auec numerateur se adioustent et denoīate' auec denoīateur.

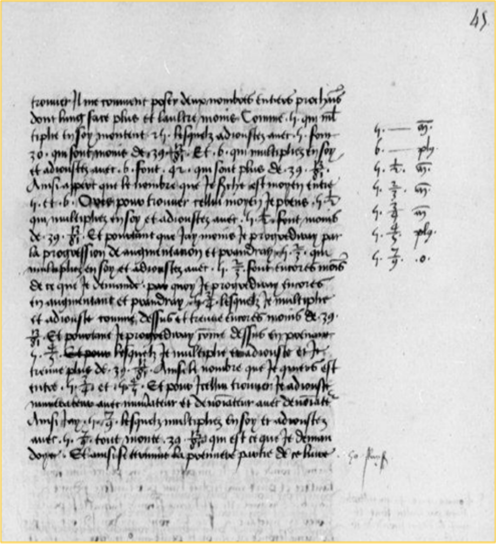
¶ Cest a entendre que quant entre deux nombres entiers prochains lon veult trouuer le premier moyen. Au moindre entier lon doit adiouster $\frac{1}{2}$. et ainsi lon aura vng nobre moyen plus grant que le moīdre | extreme et mineur du f. 44 v. maieur extreme. Cōme entre 3. et 4. Le nombre moyen et le p̄mier si est 3. $\frac{1}{2}$. Et qui plusieurs moyens vouldroit trouuer entre .3. et 3. $\frac{1}{2}$. lon doit a .3. adiouster .$\frac{1}{3}$. ou .$\frac{1}{4}$. ou $\frac{1}{5}$. ⁊c. cōme .3. $\frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{4}$. 3. $\frac{1}{5}$. ⁊c. Et taut plus lon progredist par ceste progression tant plus lon saproche du mineur extreme qui est .3. ¶ Et qui plusieurs moyens entre .3. $\frac{1}{2}$. et .4. vouldroit auoir Il conuiendroit adioster a. 3. | $\frac{2}{3}$. ou $\frac{3}{4}$. ou $\frac{4}{5}$. ⁊c. et ainsi tant plus lon progrediroit tant plus lon sapprocheroit du maieur extreme qui est 4. Et par ainsi entre deux nombres entiers prochains Innuīables moyens se peuent trouuer les vngs declinans au mineur extreme et les ault's tendens au maieur. Et encores entre deux moyens prochains Innuīables moyens se peuēt trouuer tendens pareillemt̄ a tel extreme que lon veult En adioustant numerateur auec nuīateur et denoīateur auec denoīateur cōme dit la rigle Sicōme qui entre .3. $\frac{1}{2}$. et 3. $\frac{1}{3}$. vouldroit trouuer vng moyen Il conuient adiouster .1. auec .1. qui sont les deux numerateurs et montēt 2. pour numerateur et puis .2. auec 3. qui sont les deux denoīateurs montent .5. pour denoīateur. Ainsi Jay 3. $\frac{2}{5}$. pour moyen entre .3. $\frac{1}{2}$ et 3. $\frac{1}{3}$. Car .$\frac{2}{5}$. est plus de .$\frac{1}{3}$. et moins de $\frac{1}{2}$. Enco-

¶ Pour entendre le stile et la maniere cōmant ceste rigle peult estre appliquee Je veulx par Icelle trouuer vng nombre tel que multiplie en soy et a

f.45 r. la multiplicacion adiouste cellui nombre tout monte 39. $\frac{13}{81}$. Et pour le | trouuer Il me conuient poser deux nombres entiers prochaīs dont lung face plus et laultre moins comme .5. qui mᶩtiplie en soy montent .25. lesquelz adioustez auec 5. font 30· qui sont moins de 39 ·$\frac{13}{81}$· Et ·6· qui multipliez en soy et adioustez auec ·6· font ·42· qui sont plus de ·39· $\frac{13}{81}$. Ainsi appert que le nombre que Je ꝗche est moyen entre 5· et 6· Ores pour trouuer cellui moyen Je prens .5· $\frac{1}{2}$· qui multipliez en soy et adioustez auec ·5. $\frac{1}{2}$. font moins de 39· $\frac{13}{81}$. Et pourtant que Jay moins Je progrediray par la progression de augmentacion et prandray ·5· $\frac{2}{3}$. qui multipliez en soy et adioustez auec 5· $\frac{2}{3}$, font encores moīs de ce que Je demande parquoy Je progrediray encores en augmentant en prandray ·5.$\frac{3}{4}$. lesquelz Je multiplie et adiouste comme dessus et treuue encores moins de ·39· $\frac{13}{81}$. Et pourtant Je progrediray come dessus en prenant 5· $\frac{4}{5}$. lesquelz Je multiplie et adiouste et Je treuue plus de 39. $\frac{13}{81}$. Ainsi le nombre que Je quiers est entre ·5· $\frac{3}{4}$· et ·5· $\frac{4}{5}$ Et pour Icellui trouuer Je adiouste numerateur auec nuṁateur et denoīateur auec denoiateᵉ Ainsi Jay ·5· $\frac{7}{9}$. lesquelz multipliez en soy et adioustez auec 5· $\frac{7}{9}$ tout monte 39 ·$\frac{13}{81}$. qui est ce que Je demandoye Et ainsi se termine la premiere partie de ce liure. |

5.	m̃
6.	pl⁹.
5. $\frac{1}{2}$	m̃
5. $\frac{2}{3}$	m̃
5. $\frac{3}{4}$	m̃
5. $\frac{4}{5}$	pl⁹.
5. $\frac{7}{9}$	.0.

Parte III
Aspectos históricos: Nicolas Chuquet



Chuquet: Propiedad de proporciones

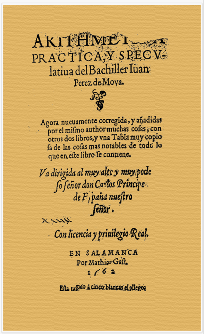
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Chuquet afirma en su obra "Triparty" que este método de aproximación es propio, de lo poco novedoso en el manuscrito. *"Il ya aussi la rigle des nombres moyens de laquelle jadiz Je suz Inventeur par le moyen de laquelle Jay fait alcuns calcules que par deux posicions Je ne pouoye faire"* (p. 151, edición de Marre).
Esta regla será usada a lo largo del s. XVI, por ejemplo podemos citar a:

- Pérez de Moya (1512?-1596)
- F. Viète (1540-1603)

Sobre Viète, ya vimos cómo utilizó esta propiedad en su De Numerosa Potestatum, 1600.
En cuanto a Pérez de Moya, veamos cómo aproximó la raíz cuadrada de 5.

Aproximación de $\sqrt{5}$



ARITHMETICA PRACTICA, Y SPECVlatiua del Bachiller Iuan Perez de Moya.

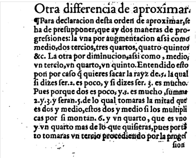
Agora nueuamente corregida, y añadidas por el mismo author muchas cosas, con otros dos libros, y vna Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que en este libro se contiene.

Va dirigida al muy alto y muy poderoso señor don Carlos Principe de España nuestro señor.

Con licencia y priuilegio Real.

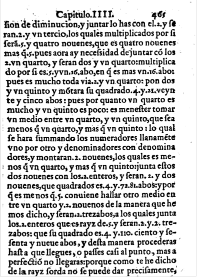
EN SALAMANCA
Por Mathias Gast.
1562

Esta tassado a cinco blancas el pliego.



Otra differencia de aproximar.

¶Para declaracion desta orden de aproximar, se ha de presupponer, que ay dos maneras de progresiones: la vna por augmentacion assi como medio, dos tercios, tres quartos, quatro quintos &c. La otra por diminucion, assi como, medio, vn tercio, vn quarto, vn quinto. Entendido esto pon por caso q̃ quieres sacar la rayz de. 5. la qual si dizes ser. 2. es poco, y si dizes ser. 3. es mucho. Pues porque dos es poco, y. 3. es mucho, summa. 2. y. 3. y seran. 5. de lo qual tomaras la mitad que es dos y medio, estos dos y medio si los multiplicas por si montan. 6. y vn quarto, que es vno y vn quarto mas de lo que quisieras, pues portanto tomaras vn tercio procediendo por la progession



Capitulo. IIII. 465

sion de diminucion, y juntar lo has con el. 2. y seran. 2. y vn tercio, los quales multiplicados por si serã. 5. y quatro nouenes, que es quatro nouenes mas q̃. 5. pues aora ay necessidad de juntar cõ los 2. vn quarto, y seran dos y vn quarto: multiplicado por si es. 5. y vn. 16. abo, en q̃ es mas vn. 16. abo: pues es mucho toda via. 2. y vn quarto: pon dos y vn quinto y mõtara su quadrado. 4. y. 21. veynte y cinco abos: pues por quanto vn quarto es mucho y vn quinto es poco: es menester tomar vn medio entre vn quarto, y vn quinto, que sea menos q̃ vn quarto, y mas q̃ vn quinto: lo qual se hara summando los numeradores llanamẽte vno por otro y denominadores con denominadores, y montaran. 2. nouenes, los quales es menos q̃ vn quarto, y mas q̃ vn quinto: junta estos dos nouenes con los. 2. enteros, y seran. 2. y dos nouenes, que quadrados es. 4. y. 72. 81. abos: y porq̃ es menos q̃. 5. conuiene hallar otro medio entre vn quarto y. 2. nouenos de la manera que hemos dicho, y seran. 2. trezabos, a los quales junta los. 2. enteros que es rayz de. 5. y seran. 2. y. 2. trezabos: que su quadrado es. 4. y. 110. ciento y sesenta y nueue abos, y desta manera procederas hasta que llegues, o passes casi al punto, mas a perfectiõ no llegaras: porque como te he dicho de la rayz sorda no se puede dar precisamente,

Aproximación de $\sqrt{5}$

Otra differencia de aproximar.

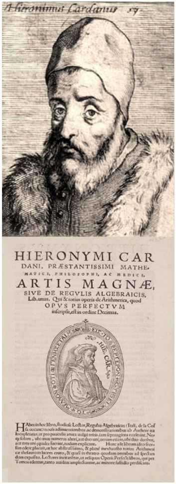
¶Para declaracion deſta orden de aproximar, ſe ha de preſupponer, que ay dos maneras de progreſsiones: la vna por augmentacion aſsi como medio, dos tercios, tres quartos, quatro quintos &c. La otra por diminucion, aſsi como, medio, vn tercio, vn quarto, vn quinto. Entendido eſto pon por caſo q̃ quieres ſacar la rayz de .5. la qual ſi dizes ſer .2. es poco, y ſi dizes ſer. 3. es mucho. Pues porque dos es poco, y .3. es mucho, ſumma 2. y .3. y ſeran .5. de lo qual tomaras la mitad que es dos y medio, eſtos dos y medio ſi los multiplicas por ſi montan. 6. y vn quarto, que es vno y vn quarto mas de lo que quiſieras, pues por tāto tomaras vn tercio procediendo por la progeſ ſion

ſion de diminucion, y juntar lo has con el. 2. y ſeran .2. y vn tercio, los quales multiplicados por ſi ſerā .5. y quatro nouenes, que es quatro nouenes mas q̃ .5. pues aora ay neceſsidad de juntar cō los 2. vn quarto, y ſeran dos y vn quarto: multiplicado por ſi es .5. y vn .16. abo, en q̃ es mas vn .16. abo: pues es mucho toda via .2. y vn quarto: pon dos y vn quinto y mōtara ſu quadrado .4. y .21. veynte y cinco abos: pues por quanto vn quarto es mucho y vn quinto es poco: es meneſter tomar vn medio entre vn quarto, y vn quinto, que ſea menos q̃ vn quarto, y mas q̃ vn quinto: lo qual ſe hara ſummando los numeradores llanamēte vno por otro y denominadores con denominadores, y montaran .2. nouenes, los quales es menos q̃ vn quarto, y mas q̃ vn quinto: junta eſtos dos nouenes con los .2. enteros, y ſeran. 2. y dos nouenes, que quadrados es .4. y .72. 81. abos: y porq̃ es menos q̃ .5. conuiene hallar otro medio entre vn quarto y .2. nouenos de la manera que hemos dicho, y ſeran .2. trezabos, a los quales junta los .2. enteros que es rayz de .5. y ſeran .2. y .2. trezabos: que ſu quadrado es .4. y .110. ciento y ſeſenta y nueue abos, y deſta manera procederas haſta que llegues, o paſſes caſi al punto, mas a perfectiō no llegaras: porque como te he dicho de la rayz ſorda no ſe puede dar preciſamente,

Cardano (1501-1576)
Artis magnae, sive de regulis algebraicis (1545), Ars magna.

- Compilación de las técnicas conocidas para la resolución de ecuaciones polinómicas hasta el grado cuatro.
- Punto de inicio de una teoría global de resolución de ecuaciones.
- Estudió con detalle las ecuaciones y proporcionó, por primera vez de manera impresa, las fórmulas por radicales para las ecuaciones de grados tres y cuatro.
- Demostró, por vez primera, que las soluciones de las ecuaciones podían ser negativas, irracionales, e incluso contener raíces de números negativos.
- Cardano quiso siempre ganar la fama y el reconocimiento público, y lo consiguió para posteridad con esta obra. Él era consciente de la importancia de las matemáticas escritas en el Ars Magna, y así en la última página del libro escribió: “Escrito en cinco años. Puede que dure varios siglos. Fin del Ars Magna sobre las reglas del álgebra”.

Parte III
Cardano

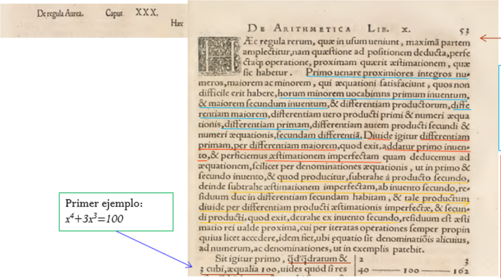


INDEX EORVM
QVÆ IN HOC LIBRO CON-
TINENTVR.

A 2

Errata quædam sic corrigito.
Fol. 5. facie 2. uersu 28. lege 6 quadratis p: 3.
Fol. 8. facie 2. uersu ultimo. reliquas.
Fol. 9. facie 2, uersu 34. superficiem.

Parte III
Cardano



De regula Aurea. Caput XXX.

Hæc

DE ARITHMETICA LIB. X. 53

HÆc regula rerum, quæ in uſum ueniunt, maximã partem amplectitur, nam quæſtione ad poſitionem deducta, perfectaq; operatione, proximam quærit æſtimationem, quæ ſic habetur. Primo uenare proximiores integros numeros, maiorem ac minorem, qui æquationi ſatisfaciunt, quos non difficile erit habere, horum minorem uocabimus primum inuentum, & maiorem ſecundum inuentum, & differentiam productorum, differentiam maiorem, differentiam uero producti primi & numeri æquationis, differentiam primam, differentiam autem producti ſecundi & numeri æquationis, ſecundam differentiã. Diuide igitur differentiam primam, per differentiam maiorem, quod exit, addatur primo inuento, & perficiemus æſtimationem imperfectam quam deducemus ad æquationem, ſcilicet per denominationes æquationis, ut in primo & ſecundo inuento, & quod producitur, ſubtrahe á producto ſecundo, deinde ſubtrahe æſtimationem imperfectam, ab inuento ſecundo, reſiduum duc in differentiam ſecundam habitam, & tale productum diuide per differentiam producti æſtimationis imperfectæ, & ſecundi producti, quod exit, detrahe ex inuento ſecundo, reſiduum eſt æſtimatio rei ualde proxima, cui per iteratas operationes ſemper propinquius licet accedere, idem fiet, ubi equatio ſit denominatiõis alicuius, ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit.

Sit igitur primo, q̃d'q̃dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd ſi res

2		3
40	100	162

Descripción del método numérico
Regula Aurea

Dos números: primer invento, segundo invento (x_1,x_2)
(que originan, al sustituir, un primer producto y un segundo producto, $f(x_1)$ y $f(x_2)$)
Diferencia mayor (es decir, $f(x_2)$-$f(x_1)$)
Diferencia primera y diferencia segunda $(f(x_2)\text{-}k,\ k\text{-}f(x_1))$

Primer ejemplo:
$x^4+3x^3=100$

Divide: diferencia primera / diferencia mayor
Añade: primer invento

Estimación imperfecta de la solución:
Primer invento + dif. primera / dif. mayor
→ $x_3 = x_1 + [k - f(x_1)] / [f(x_2)\text{-}f(x_1)]$
(observemos que en principio la diferencia de los inventos es 1)

Siguiente etapa: con la estimación hecha (x_3), se sustituye en la ecuación para obtener su producto $(f(x_3))$; y a lo que se produce se le resta el producto segundo $(f(x_3)–f(x_2))$;
a continuación, se le resta a la solución imperfecta el segundo invento (esto es, $(x_3 – x_2)$).
Y ese producto se divide por la diferencia del producto de la estimación imperfecta y de del segundo producto;
Y lo que se obtiene se detrae del segundo invento, y el residuo que obtenemos es la estimación de la cosa

Nueva aproximación:

$$x_2 - (x_3\text{-}x_2)\bullet(f(x_2)\text{-}k) / [f(x_3)–f(x_2)]$$

Proceso iterativo: "Cui per iteratas operatione propinquius licet accedere"

Segundo ejemplo: $x^2+20=10x$

Quòd ſi quadratum & 20, æquentur 10 rebus, tunc ſi res eſſet 7, haberemus quadratum p:20, æquale rebus $9\frac{6}{7}$, & ſi res eſſet 8, haberemus quadratum p:20, æquale rebus $10\frac{1}{2}$, igitur ut prius, inuentum primum eſt 7, productum primum $9\frac{6}{7}$, inuentum ſecundum 8, productum ſecundum $10\frac{1}{2}$, differentia maior $\frac{9}{14}$, differentia prima $\frac{1}{7}$, differentia ſecunda $\frac{1}{2}$, diuidemus igitur differentiam primam, per maiorem differentiam, exibit $\frac{2}{9}$, & addemus hoc ad 7, inuentum primum, fiet æſtimatio imperfecta $7\frac{2}{9}$, cuius quadratum p:20, eſt æquale 9 rebus & $\frac{116}{117}$, ideo quia hoc inſenſibiliter differt ferè, à 10, numero rerum, ideo non utimur alia operatione, ſed dicemus æſtimationem propinquam eſſe $7\frac{2}{9}$.

Tercer ejemplo: $x^3=6x+20$

Sit etiam cubus æqualis 6 rebus p:20, dicemus, ſi 3 eſſent res, 6 res & 20 æquarentur $1\frac{11}{27}$ cubi, & ſi res eſſent 4, eſſent 6 res & 20, æq̃les $\frac{11}{16}$ cubi, igitur inuentum primum eſt 3, & productum primum $1\frac{11}{27}$, inuentum ſecundum erit 4, productum ſecundum $\frac{11}{16}$, differentia prima $\frac{11}{27}$, differentia ſecunda $\frac{5}{16}$, differentia maior $\frac{311}{432}$, cum qua diuide differentiã minorẽ, exit $\frac{176}{311}$, quam adde ad 3, fiet æſtimatio imperfecta $3\frac{176}{311}$, ſequere æquationem, ſcilicet aſſumendo 6 res p:20, & erunt $\frac{1245186154}{1303938029}$ ſui cubi, hoc autem eſt proximum ad $\frac{31}{34}$, ab hoc detrahemus productum ſecundum, & relinquẽtur $\frac{61}{271}$ & $\frac{5}{16}$, ſimiliter ſubtraho $3\frac{176}{311}$, æſtimationem imperfectã, à 4 inuento ſecundo, relinquitur $\frac{135}{311}$, hoc duco in $\frac{5}{16}$ differentiam ſecundã, ut etiam in primo exemplo, fit $\frac{675}{4976}$, diuide per differentiam producti ſecundi, & producti æſtimationis, & eſt $\frac{61}{271}$, exit $\frac{182925}{303536}$, detrahe à ſecundo inuento, ut prius, relinquitur rei æſtimatio $3\frac{120611}{303536}$, & hoc eſt proximum ad $3\frac{201}{506}$, & ideo ad $3\frac{2}{5}$, & 6 res p:20, ſunt $40\frac{2}{5}$, & cubus $3\frac{2}{5}$, eſt $39\frac{38}{625}$, & ſi uelles proximius poſſes operari tertio, ſicut primo feciſti, & proculdubio peruenires ad inſenſibilem differentiam, & ratio hæc uniuerſalis eſt, nec indiget alia regula.

Et ſimiliter operaberis, ubi eſſent tres denominationes æquales duabus

duabus alijs, aut tribus, ſed cum duplici ingreſſu, uel triplici, potes etiam deducere ad numeros omnia, ut in primo exemplo, & operationes in eo caſu ſunt longe faciliores, uelut ſi dicam q̃d'q̃dratum & 6 q̃drata & 200, æquantur 10 cubis & 12 rebus, erit primũ inuentum 9, & productũ m:152, differentia quia 10 cubi & 12 res ſuperant q̃d'q̃dratũ 6 q̃d. & 200, & ſecundum inuentum erit 10, & productum ſecundum erit 680 p: quo q̃d'q̃dratum & 6 quadrata & 200, ſuperant 10 cubos & 12 res, & tunc differentia prima, æqualis eſt producto primo, & differentia ſecunda, producto ſecũdo, & maior differentia eſt aggregatum ex utroq;, & tunc ſufficiet pro prima operatione, diuidere ut prius, differentiam primã per differentiam maiorẽ, & quod exit, & eſt $\frac{19}{104}$, addemus primo inuento, & fiet æſtimatio imperfecta $9\frac{19}{104}$, deinde ſi uis proximius accedere, produces hanc æſtimationem ad ſuas denominationes utrinq;, & collige differentiam quæ uocetur A. quam multiplica per differentiam æſtimationis imperfectæ & ſecundi inuenti, & productum diuide denuo per maiorem differentiam, & quod exit, adde aut minue, ſecundum quod oportet, & habebis intentum, & hoc modo liceret etiam operari in ſecundo & tertio exemplo, ſed nos uoluimus declarare utrumq; modum, ad maiorem in occaſionibus facilitatem, idem dic de radicibus extrahendis.

Cuarto ejemplo: $x^4+6x^2=10x^3+12x$

El último método numérico que presentamos está ligado a la figura del matemático belga Simon Stevin (Brujas, 1548 – La Haya, 1620)

- Estudios comerciales; cajero, contable
- Mecenazgo del príncipe Mauricio de Nissau
- Matemático e ingeniero
- Importancia de los cálculos

Destacamos las obras:

- De Thiende, 1585, en flamenco; traducido al francés como La Disme; con esta obra se introducen los decimales en Europa.
- *L'arithmétique*, 1585.


DE
THIENDE
Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen.
Beschreven door Simon Stevin van Brugghe.
Tot Leyden,
By Christoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.

HET ANDER DEEL DER THIENDE VANDE WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men sal de gheghevene ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

		⓪	①	②	③
		2 7	8	4	7
		3 7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 941304 dat sijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen staende, anwijsen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckē t'samen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich sijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ②

Der Thiende

La Disme

•Appendice Algébraique de Simon Stevin, contenant règle générale de toutes équations. 1594

-- El método de resolución numérica de ecuaciones fue dado por Stevin en un apéndice publicado en 1594, bajo el título *Appendice Algébraique de Simon Stevin, de Bruges, contenant règle générale de toutes équations. 1594.*

-- El único ejemplar conocido se perdió en 1914, en un incendio producido en la biblioteca de la Universidad de Lovaina (Bélgica), el 25 de agosto de 1914, por tropas alemanas.

- *Appendice Algébraique de Simon Stevin, de Bruges, contenant règle générale de toutes équations. 1594*.

-- Por fortuna, esta pequeña obra aparece impresa en diferentes partes de la obra de Stevin:

- Libro V (*Des Meslanges*), pp 7-10 de las memorias matemáticas de Simon Stevin, publicadas en francés en 1608.
- Libro V de *Wisconstighe Ghedachtenissen* (*Ghemengde stoffen*) pp 7-10, publicado en alemán en 1608.
- Libro V de *Hypomnemata Mathematica* pp 7-9, publicado en latín, también en 1608.
- *L'Arithmétique,* editada por Albert Girard en 1625 pp. 351-355.
- En *Oeuvres* de Simon Stevin, editadas también por Albert Girard en 1634, p. 88.

Parte III
Stevin

La ecuación $x^3=300x + 33\,915\,024$

Aritmética de Simon Stevin, editada por Albert Girard en 1625.

DES EQVATIONS. PR. LXXVII. 351

REIGLE.

Estant donnez trois termes de nombres Algebraiques quelconques: Trouver leur quatriesme proportionel, ou parfaict, ou avec infini approchement.

I'ay descrit (depuis le 66 probleme jusques au 80) l'invention du quatriesme terme proportionel, de trois Algebraiques donnez, & cela si avant comme j'estime qu'icelle matiere est cognue: Mais j'ay puis apres trouvé une reigle generale, pour de tous trois termes Algebraiques donnez trouver le quatriesme, ou valeur de 1 ① parfaicte, ou avec infini approchement, ce qu'en la practique nous donne quasi autant comme une operation qui consiste en sa parfaicte demonstration Mathematique; car comme les sinus sont en leurs tables imparfaicts, & toutesfois en la practique font autant comme si c'estoyent multinomies radicaux accomplis, ainsi se fait le semblable en ceste matiere Algebraique.

Le donné. Soyent donnez trois termes selon le probleme tels: Le premier 1 ③, le second 300 ① + 33915024, le troisiesme 1 ①.

Le requis. Il nous faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction. Pour premierement declarer en general la methode suivante je di qu'on trouvera de combien de characteres doit estre la valeur de 1 ①: Laquelle multitude de characteres estant cognue, on trouvera puis apres le premier charactere, qui sera un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Puis se trouvera semblablement le deuxiesme, & tous les autres tant qu'il y en a.

Or pour venir à la chose, & premierement trouver de combien de characteres doit estre la valeur 1 ① donnée; je mets pour icelle 1, enquiers par le mesme ce qu'il en fortira,

352 LE II. LIVRE D'ARITH.

fortira, disant, veu que 1 ① fait 1, les 300 ① font 300, par le 67 probleme: aux mesmes adjousté 33915024, fait pour la valeur du deuxiesme terme 33915324: Et le premier terme, à sçavoir 1 ③, fera tant seulement 1: Ce qui estant trop peu, parce que la valeur du premier terme doit estre egal avec la valeur du second, & pourtant je mets au second 10 pour la valeur de 1 ①, & enquiers par le mesme comme dessus, & trouve la valeur du second terme de 33918024, & le premier terme de 1000: Ce qui estant autrefois trop peu, je mets au troisiesme 100 pour valeur de 1 ①; le mesme estant aussi trop peu, je mets au quatriesme 1000, par lequel je trouve le premier terme trop grand: Pourtant la valeur de 1 ① est moindre que 1000, & majeur que 100, elle est donc necessairement de trois characteres.

Or estant cognu que la desirée valeur est de trois characteres, il faut que le premier soit un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mais il est cy dessus enquis avec le premier charactere 1, à sçavoir avec 100, & trouvois trop peu, pourtant je l'essaye maintenant avec le premier charactere 2, mettant 200 pour valeur de 1 ①, & trouve trop peu: Ie l'enquiers puis apres avec 300, & vient aussi trop peu: Puis avec 400, & trouve trop, ce qui me denote que le premier charactere doit estre 3.

Or pour trouver le second charactere, il doit necessairement estre ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Mais il est devant esprouvé avec le second charactere 0, à sçavoir avec 300, & vint trop peu, pourtant je mets maintenant le second caractere 1, à sçavoir 310, & trouve trop peu: puis apres 320, vient aussi trop peu: puis 330, & vient trop; ce qui me signifie que le second charactere faut estre 2.

Pour trouver maintenant le troisiesme charactere, il doit

DES EQVATIONS. PR. LXXVII. 353

doit estre necessairement ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9. Mais il est dessus enquis avec le troisiesme charactere 0, à sçavoir par 320, & vint trop peu; pourtant je mets maintenant le troisiesme charactere 1, à sçavoir 321, & trouve trop peu; puis apres 322, & vient aussi trop peu; puis 323, vient trop peu; puis apres 324, & trouve par iceluy la valeur du premier terme, egal à la valeur du second, à sçavoir l'un & l'autre de 34012224; ce qui me demonstre que 324 est la valeur de 1 ①, & quatriesme terme proportionel requis; car comme 34012224 valeur du premier à 34012224 valeur du second terme, ainsi 324 valeur du troisiesme eu quatriesme 324.

COROLLAIRE.

Il appert par le susdit, que quand la valeur de 1 ① est nombre entier, que la mesme valeur se peut tousiours trouver parfaictement.

Mais si le susdit compte n'eust pas venu ainsi precisement, comme par exemple, que le ⓪ ou nombre Arithmetique donné au lieu de 33915024, eust tant seulement esté 33900000, alors 323 eust esté peu, & 324 trop, ce qui me certifie que la valeur de 1 ① fait 323 avec un rompu moindre que unité. Or pour trouver le mesme rompu, ou d'y approcher infiniment; je mets 323 avec encore un 0, dessus une ligne comme numerateur, & 10 dessoubs comme nominateur, en ceste sorte $\frac{3230}{10}$: Ce rompu fait 323, qui estant trop peu, il faut que 0 du numerateur face 0 avec quelque reste, ou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Le mesme charactere estant trouvé comme dessus, & qu'il y a encore quelque superflu, on adjoustera au numerateur & nominateur autrefois 0, enquirant comme dessus, ce que doit venir au lieu d'iceluy 0 du numerateur: Et procedant ainsi infiniment, l'on approche infiniment plus pres au requis.

Z Mais

• *Appendice Algébraique de Simon Stevin, de Bruges, contenant règle générale de toutes équations. 1594.*

-- ¿Cómo sabemos que existió dicho opúsculo de Stevin sobre resolución numérica de ecuaciones?

Por el artículo de P.-L. Gilbert, profesor de la Universidad de Lovaina:

Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin, de Bruges,

Bulletins de L'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts de Belgique

(2me Série), Tome VIII (1859)

(192)

Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin, de Bruges. Lettre à M. Ad. Quetelet, par M. P.-L. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.

« Monsieur,

» Dans la notice que j'ai consacrée au mathématicien louvaniste Adrianus Romanus, j'ai fait l'observation que, d'après le témoignage de ce géomètre remarquable, Ludolph van Collen, connu par plusieurs ouvrages et par l'expression du rapport π avec 35 décimales, aurait été en possession d'une méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés, par approximation (1). En continuant les recherches que j'avais entreprises sur les travaux de Romanus, et en parcourant les ouvrages de sa bibliothèque qui se trouvent à Louvain, j'ai rencontré un opuscule de Simon Stevin, qui me paraît avoir échappé aux recherches des biographes de l'illustre mathématicien brugeois, et où j'ai trouvé la confirmation complète de ce fait, qui intéresse l'histoire de la science dans les Pays-Bas.

(194)

tions très-complètes sur les œuvres de Stevin (1), ne mentionne pas cet opuscule; il en est de même des nombreuses notices sur Stevin qu'il m'a été possible de parcourir. Je suis donc porté à croire qu'il n'a pas été connu de ceux qui ont recueilli avec le plus de soin les travaux de l'illustre Brugeois, et comme le moindre fragment sorti de cette plume puissante doit être soigneusement conservé, j'ai pensé que l'Académie verrait avec plaisir une analyse de celui-ci, qui est probablement fort rare.

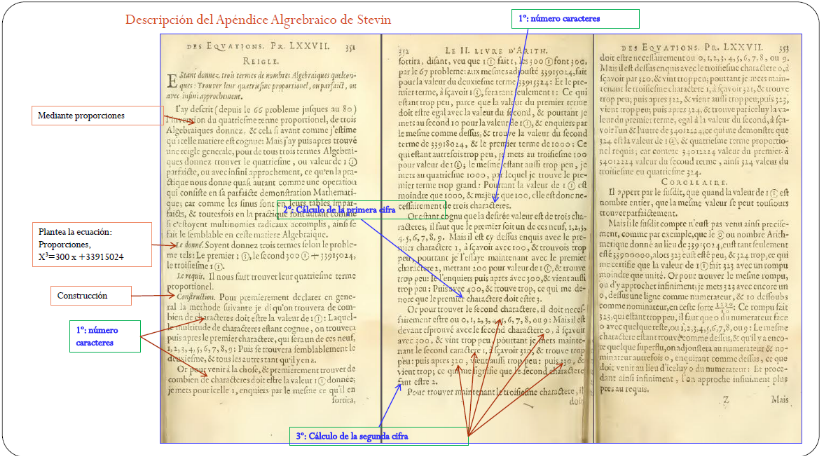
» Cet opuscule, sans nom d'imprimeur, a pour titre : *Appendice algébraique de Simon Stevin, de Bruges, contenant règle générale de toutes équations. 1594.* Les premières lignes indiquent suffisamment son objet :

« Nous avons descrit, l'an 1585, une arithmétique con-
» tenant entre autres l'algèbre avec les équations que nous
» estimions alors être trouvées. Mais ayant puis après in-
» venté une règle générale de toutes quantités proposées
» pour en trouver la valeur de 1 (l) ou parfaictement (2),
» ou par infini approchement, c'est-à-dire qu'elle diffère
» si peu du vray qu'on ne sauroit donner nombre si petit
» que la différence ne se prouvera moindre, il m'a semblé
» convenable pour faire chose agréable aux gens studieux
» d'icelle matière, de divulguer la mesme invention comme
» appendice de la susdite algèbre, déclarant le contenu
» par telle proposition comme s'ensuit. »

» C'est donc une méthode pour la résolution numérique des équations de tous les degrés.

moins curieux qu'il ait donné un procédé pour résoudre numériquement les équations de tous les degrés, à une époque où ce problème était à peine soupçonné.

Descripción del Apéndice Algrebraico de Stevin



DES EQVATIONS. PR. LXXVII. 351

REIGLE.

Estant donnez trois termes de nombres Algebraiques quelconques: Trouver leur quatriesme proportionel, ou parfaict, ou avec infini approchement.

J'ay descrit (depuis le 66 probleme jusques au 80) l'invention du quatriesme terme proportionel, de trois Algebraiques donnez, & cela si avant comme j'estime qu'icelle matiere est cognue: Mais j'ay puis apres trouvé une reigle generale, pour de tous trois termes Algebraiques donnez trouver le quatriesme, ou valeur de 1 ① parfaicte, ou avec infini approchement, ce qu'en la practique nous donne quasi autant comme une operation qui consiste en sa parfaicte demonstration Mathematique; car comme les sinus sont en leurs tables imparfaicts, & toutesfois en la practique font autant comme si c'estoyent multinomies radicaux accomplis, ainsi se fait le semblable en ceste matiere Algebraique.

Le donné. Soyent donnez trois termes selon le probleme tels: Le premier 1 ③, le second 300 ① + 33915024, le troisiesme 1 ①.

Le requis. Il nous faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction. Pour premierement declarer en general la methode suivante je di qu'on trouvera de combien de characteres doit estre la valeur de 1 ①: Laquelle multitude de characteres estant cognue, on trouvera puis apres le premier charactere, qui sera un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Puis se trouvera semblablement le deuxiesme, & tous les autres tant qu'il y en a.

Or pour venir à la chose, & premierement trouver de combien de characteres doit estre la valeur 1 ① donnée; je mets pour icelle 1, enquiers par le mesme ce qu'il en fortira,

352 LE II. LIVRE D'ARITH.

fortira, disant, veu que 1 ① fait 1, les 300 ① font 300, par le 67 probleme: aux mesmes adjousté 33915024, fait pour la valeur du deuxiesme terme 33915324: Et le premier terme, à sçavoir 1 ③, fera tant seulement 1: Ce qui estant trop peu, parce que la valeur du premier terme doit estre egal avec la valeur du second, & pourtant je mets au second 10 pour la valeur de 1 ①, & enquiers par le mesme comme dessus, & trouve la valeur du second terme de 33918024, & le premier terme de 1000: Ce qui estant autrefois trop peu, je mets au troisiesme 100 pour valeur de 1 ①; le mesme estant aussi trop peu, je mets au quatriesme 1000, par lequel je trouve le premier terme trop grand: Pourtant la valeur de 1 ① est moindre que 1000, & majeur que 100, elle est donc necessairement de trois characteres.

Or estant cognu que la desirée valeur est de trois characteres, il faut que le premier soit un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mais il est cy dessus enquis avec le premier charactere 1, à sçavoir avec 100, & trouvois trop peu, pourtant je l'essaye maintenant avec le premier charactere 2, mettant 200 pour valeur de 1 ①, & trouve trop peu: Je l'enquiers puis apres avec 300, & vient aussi trop peu: Puis avec 400, & trouve trop, ce qui me denote que le premier charactere doit estre 3.

Or pour trouver le second charactere, il doit necessairement estre ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Mais il est devant esprouvé avec le second charactere 0, à sçavoir avec 300, & vint trop peu, pourtant je mets maintenant le second charactere 1, à sçavoir 310, & trouve trop peu: puis apres 320, vient aussi trop peu: puis 330, & vient trop; ce qui me signifie que le second charactere doit estre 2.

Pour trouver maintenant le troisiesme charactere, il doit

DES EQVATIONS. PR. LXXVII. 353

doit estre necessairement ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9. Mais il est dessus enquis avec le troisiesme charactere 0, à sçavoir par 320, & vint trop peu; pourtant je mets maintenant le troisiesme charactere 1, à sçavoir 321, & trouve trop peu; puis apres 322, & vient aussi trop peu; puis 323, vient trop peu; puis apres 324, & trouve par iceluy la valeur du premier terme, egal à la valeur du second, à sçavoir l'un & l'autre de 34012224; ce qui me demonstre que 324 est la valeur de 1 ①, & quatriesme terme proportionel requis; car comme 34012224 valeur du premier à 34012224 valeur du second terme, ainsi 324 valeur du troisiesme au quatriesme 324.

COROLLAIRE.

Il appert par le susdit, que quand la valeur de 1 ① est nombre entier, que la mesme valeur se peut tousiours trouver parfaictement.

Mais si le susdit compte n'eust pas venu ainsi precisement, comme par exemple, que le ③ ou nombre Arithmetique donné au lieu de 33915024, eust tant seulement esté 33900000, alors 323 eust esté peu, & 324 trop, ce qui me certifie que la valeur de 1 ① fait 323 avec un rompu moindre que unité. Or pour trouver le mesme rompu, ou d'y approcher infiniment, je mets 323 avec encore un 0, dessus une ligne comme numerateur, & 10 dessoubs comme nominateur, en ceste sorte $\frac{3230}{10}$: Ce rompu fait 323, qui estant trop peu, il faut que o du numerateur face o avec quelque reste, ou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Le mesme charactere estant trouvé comme dessus, & qu'il y a encore quelque superflu, on adjoustera au numerateur & nominateur autrefois o, enquirant comme dessus, ce que doit venir au lieu d'iceluy o du numerateur: Et procedant ainsi infiniment, l'on approche infiniment plus pres au requis.

Z Mais

Parte III
Siglo XVI

En este apartado hemos intentado dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo procedían nuestros antepasados a la hora de resolver numéricamente las ecuaciones polinómicas?
- ¿Qué ideas matemáticas emplearon?
- ¿Por qué necesitaron esos métodos numéricos?

Con el desarrollo a la respuesta de tales cuestiones, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Importancia de la visión histórica del tema, alimentar la parte humanística de las matemáticas
- Ideas matemáticas ya en autores de otras etapas
- Enfoque eminentemente geométrico o aritmético del tema, sin uso de álgebra
- Dificultades que ha habido con el lenguaje matemático hasta que nuestra disciplina no se "algebriza"
- Aplicaciones en el aula

- Isaac Newton (1643-1727)
- Newton resuelve una única ecuación en “De analysi per aequationes numero terminorum infinitas”, publicada en en 1704, aunque se sabe que entregó este trabajo a su profesor Isaac Barrow en 1669.
- La ecuación considerada es $y^3 - 2y - 5 = 0$

ſimplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita Superficies cognoſcetur.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

Quia tota difficultas in Reſolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illuſtrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, reſolvenda: Et ſit 2, numerus qui minus quam decima ſui parte differt a Radice quæſita. Tum pono $2 + p = y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda eſt, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, ſive $p = 0,1$ prope veritatem eſt; itaque ſcribo $0,1$ in quotiente, & ſuppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius ſubſtituo, unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, ſive fere ſit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis excluſive diſtant) ſcribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa ſit.

Et ſupponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſque placuerit. Verum ſi ad bis tot figuras

figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+0,06 \quad + 1,2 \quad + 6,0$ $+1, \quad + 10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708 - 0,068040r + 6,3r^2$ $-0,060642 \quad + 11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$		

ſuam neglecto, & prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$ fere, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ fere, quam ſcribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa ſubducens habeo $2,09455147$ Quotientem quæſitam.

- Newton asume que se conoce una aproximación, que difiere de la solución y en menos de una décima parte.
- Toma la aproximación $y_0 = 2$, luego $y = 2 + p$.
- Sustituyendo en la ecuación y desarrollando se llega a $(*):\ p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$.
- Como p es pequeño, se ignoran las potencias de grado mayor que 1, por lo que queda $10p - 1 = 0$, i.e., $p = 0{,}1$.
- Procediendo del mismo modo, ahora se pone $p = 0{,}1 + q$ y, al sustituir en $(*)$, se llega a $(**):\ q^3 + 6{,}4q^2 + 11{,}23q + 0{,}61 = 0$.
- Al despreciar potencias de q de grado superior a 1, es $q = -0{,}0054$.
- A continuación, se hace $q = -0{,}0054 + r$, y se sustituye en $(**)$, y se llega a que $r = -0{,}00004853$.
- Finalmente, se obtiene la aproximación $y = 2 + p + q + r = 2 + 0{,}1 - 0{,}0054 - 0{,}00004853 = 2{,}09455147$ (la solución exacta es $y = 2{,}09455148154232\ldots$).

Observemos: Si llamamos $f(y) = y^3 - 2y - 5$, una vez que conocemos una primera aproximación y_0, si escribimos $y_1 = y_0 + p$ para la siguiente aproximación, vemos que al sustituir en $f(y_1) = f(y_0 + p)$, y despreciar los términos con potencias p^2 y p^3, se tiene

$$(3y_0^2 - 2)p = 5 + 2y_0 - y_0^3 \to p = -\frac{f(y_0)}{f'(y_0)} \to y_1 = y_0 - \frac{f(y_0)}{f'(y_0)}$$

En general, el método iterativo de Newton o Newton-Raphson consiste, conocido el valor x_n como aproximación de la ecuación, en considerar

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

Dos referencias interesantes sobre la historia del método de Newton:

F. Cajori
Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation
The American Mathematical Monthly 18, No.2 (1911), 29-32, doi.org/10.1080/00029890.1911.11997596

T.J. Ypma
Historical Development of the Newton-Raphson Method
SIAM Review, Vol. 37, No. 4 (1995), 531-551, http://www.jstor.org/stable/2132904

El método iterativo de Halley, en formulación moderna, nos da bajo ciertas condiciones de proximidad a la solución de la ecuación $f(x) = 0$, la recurrencia

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)}}.$$

Aunque no indagaremos sobre cómo construir esta recurrencia, sí que debemos hacer notar que en su trabajo
"Methodus nova accurata et facilis inveniendi radices aequationum quarumcumque generaliter, sine praevia reduction", Philosophical Transactions 18 (1694), 136-148,
Halley considera tres ecuaciones polinómicas para ilustrar convenientemente su método. Para ilustrar ideas, consideramos la ecuación $z^4 - 3z^2 + 75z = 10000$ y veamos cómo procede Halley. Hagamos notar la ausencia total de cálculo diferencial en su desarrollo.

Previamente, Halley nos muestra una tabla de potencias

Tabella Potestatum.

$$
\begin{array}{llllllll}
 & & s & t & u & w & x & y \\
z^7 = & l a^7 & + 7 l a^6 e & + 21 l a^5 ee & + 35 l a^4 e^3 & + 35 l a^3 e^4 & + 21 l a^2 e^5 & + 7 l a e^6 + l \\
z^6 = & k a^6 & + 6 k a^5 e & + 15 k a^4 ee & + 20 k a^3 e^3 & + 15 k a^2 e^4 & + 6 k a e^5 & + k e^6 \\
z^5 = & b a^5 & + 5 b a^4 e & + 10 b a^3 ee & + 10 b a^2 e^3 & + 5 b a e^4 & + b e^5 & \\
z^4 = & g a^4 & + 4 g a^3 e & + 6 g a^2 ee & + 4 g a e^3 & + g e^4 & & \\
z^3 = & f a^3 & + 3 f a^2 e & + 3 f a ee & + f e^3 & & & \\
z^2 = & d a^2 & + 2 d a e & + d ee & & & & \\
z = & c a & + c e & & & & &
\end{array}
$$

Transactions, Numb. 210. Pag. 143.

Desarrollos de las potencias de $z = a + e$

Halley resuelve las siguientes ecuaciones:

- $z^4 - 3z^2 + 75z = 10000$
- $z^3 - 17z^2 + 54z = 350$
- $z^4 - 80z^3 + 2000z^2 - 15000z + 5000 = 0$

Su método consiste, grosso modo, en:

1. Hallar una aproximación inicial a de la ecuación
2. Si escribimos la ecuación en la forma $f(x) = q$ y vemos que $f(a) > q$, entonces se susituye seguidamente $z = a - e$ en la ecuación; si $f(a) < q$, se hace $z = a + e$ (en ambos casos se supone que $e > 0$)
3. Al sustituir $z = a - e$ o $z = a + e$ en la ecuación inicial, se llega a una nueva ecuación en e
4. En la nueva ecuación se desprecian las potencias en e de orden mayor que 2
5. Se llega a una ecuación de segundo grado en e, de la que se obtiene el valor e y se obtiene la aproximación correspondiente $z = a \pm e$
6. Se repite el proceso, ahora con $a \pm e$ como primera aproximación de la ecuación completa en e.

Parte III
Halley: $z^4 - 3z^2 + 75z = 10000$

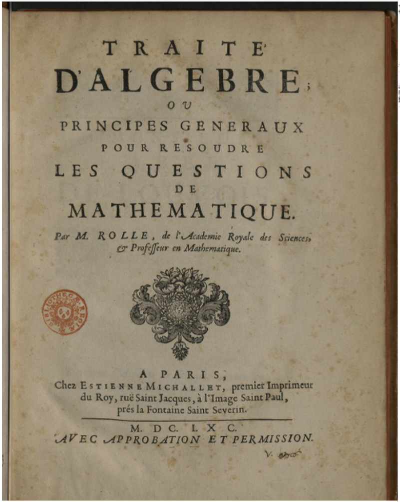
Exemp. I. Proponatur æquatio $z^4 - 3zz + 75z = 10000$. Pro prima Hypotheſi ponatur $a = 10$, ac conſequenter prodibit æquatio.

$$\begin{array}{llllll} z^4 = & +a^4 & 4a^3e + 6a^2ee & 4ae^3 + e^4 \\ -dz^2 = & -da^2 & dae - dee & \\ +cz = & +ca & ce & \\ \\ = & +10000 & 4000e + 600ee & 40e^3 + e^4 \\ & -300 & 60e - 3ee & \\ & +750 & 75e & \\ & -10000 & & \\ \hline & +450 - & \underset{s}{4015}e + \underset{t}{597}ee - & \underset{u}{40}e^3 + e^4 = 0 \end{array}$$

Signis + ac − (reſpectu e ac e^3) in dubio relictis, uſque dum ſciatur an e ſit negativa vel affirmativa; Quod quidem aliquam paret difficultatem, cum in æquationibus plures radices admittentibus, ſæpe augeantur Homogenia Comparationis, ut appellant, à minuta quantitate a, ac è contra eâ auctâ minuantur. Determinatur autem ſignum ipſius e ex ſigno quantitatis b; ſublatâ enim Reſolvendâ ex Homogenio ab a formato, ſignum ipſius se, ac proinde partium in ejus compoſitione prævalentium, ſemper contrarium erit ſigno differentiæ b. Unde patebit an fuerit $-e$ vel $+e$, ſive an a major vel minor radice vera aſſumpta ſit. Ipſa autem e ſemper æquatur $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$, quoties b ac t eodem ſigno notantur; quoties vero diverſo ſigno connectuntur, eadem e fit $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t}$. Poſtquam vero compertum ſit fore $-e$, in affirmatis æquationis membris negentur e, e^3, e^5, &c. in negatis affirmentur; ſcribantur ſcilicet ſigno contrario; ſi vero fuerit $+e$, affirmentur in affirmatis,

matis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc noſtro exemplo 10450 loco Reſolvendæ 10000, ſive $b = +450$, unde conſtat a majorem juſto aſſumptam, ac proinde haberi $-e$: Hinc æquatio fit $10450 - 4015e + 597ee - 4e^3 + e^4 = 10000$. Hoc eſt $450 - 4015e + 597ee = 0$. Adeoque $450 = 4015e - 597ee$ ſive $b = se - tee$ cujus Radix e ſit $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$.

Vel ſi mavis $\frac{s}{2t} - \sqrt{\frac{ss}{4tt} - \frac{b}{t}}$, id eſt, in præſenti caſu, $e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$, unde provenit Radix quæſita prope verum, 9,886. Hoc vero pro ſecundâ Hypotheſi ſubſtituto, emergit $a + e = z$ accuratiſſime 9,88626039364 95...., in ultima figura vix binario juſtum ſuperans; nempe cum $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t} = e$. Atque hoc etiam ſi opus fuerit, multo ulterius verificari poſſit, ſubducendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 + \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss + tb}}$ ſi fuerit $+e$, vel addendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}$, radici prius inventæ, ſi ſit $-e$. Cujus compendium eo pluris æſtimandum quod quandoque, ex ſola prima ſuppoſitione, ſemper vero ex ſecunda, iiſdem conſervatis coefficientibus quouſque velis calculum continuare poſſis. Cæterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, viz. $z = 10,26....$ quam cuilibet accuratius expiſcari licet.



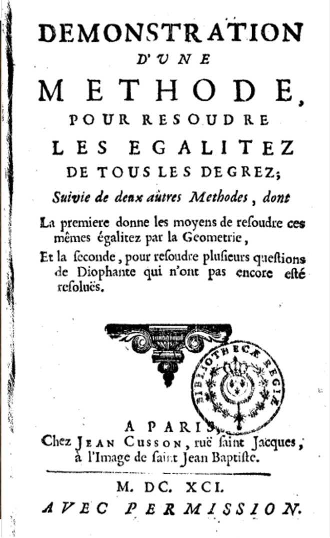
TRAITE D'ALGEBRE; OU PRINCIPES GENERAUX POUR RESOUDRE LES QUESTIONS DE MATHEMATIQUE.

Par M. ROLLE, de l'Academie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, premier Imprimeur du Roy, ruë Saint Jacques, à l'Image Saint Paul, prés la Fontaine Saint Severin.

M. DC. LXXXX.

AVEC APPROBATION ET PERMISSION.



DEMONSTRATION D'UNE METHODE, POUR RESOUDRE LES EGALITEZ DE TOUS LES DEGREZ;

Suivie de deux autres Methodes, dont

La premiere donne les moyens de resoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie,

Et la seconde, pour resoudre plusieurs questions de Diophante qui n'ont pas encore esté resoluës.

A PARIS,
Chez JEAN CUSSON, ruë saint Jacques, à l'Image de saint Jean Baptiste.

M. DC. XCI.

AVEC PERMISSION.

Aparece muy bien explicado en

Julius Shain
The method of cascades
The American Mathematical Monthly Vol. 44, No. 1 (1937), pp. 24–29

Se ejemplifica con la ecuación

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 14 = 0$$

Primer paso: Preparación de la ecuación. Se ha de conseguir que la ecuación se transforme en otra cuyos coeficientes tengan alternancia de signo para conseguir que las raíces sean positivas. Se consigue gracias al cambio

$$x = \left(\frac{a}{c} + 1\right) - y$$

c: coeficiente principal, 1; a: es el valor máximo en valor absoluto de los coeficientes negativos, $a = 14$;
por tanto, con el cambio $x = 15 - y$ conduce a la ecuación

$$y^4 - 62y^3 + 1427y^2 - 14446y + 54264 = 0.$$

Segundo paso: A partir de la ecuación $y^4 - 62y^3 + 1427y^2 - 14446y + 54264 = 0$, se forman las cascadas:

$$\begin{aligned}
(a):&\quad y^4 - 62y^3 + 1427y^2 - 14446y + 54264 = 0\\
(b):&\quad 4y^3 - 186y^2 + 2854y - 14446 = 0\\
(c):&\quad 12y^2 - 372y + 2854 = 0\\
(d):&\quad 24y - 372 = 0
\end{aligned}$$

Parte III
Rolle: $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

$$\begin{array}{rc} (a): & y^4 - 62y^3 + 1427y^2 - 14446y + 54264 = 0 \\ (b): & 4y^3 - 186y^2 + 2854y - 14446 = 0 \\ (c): & 12y^2 - 372y + 2854 = 0 \\ (d): & 24y - 372 = 0 \end{array}$$

Tercer paso: Inicio de la resolución de la ecuación. Rolle afirma en su "Démonstration" que las raíces de una ecuación quedan separadas por las raíces de su cascada, en la forma que ahora comentaremos.

Llama "petite hypothèse" al hecho de que 0 es menor que cualquiera de sus raíces.

Llama "grande hypothèse" al hecho de que $\frac{a}{c} + 1$ es cota superior de las raíces; para esta ecuación, la cota es $\frac{14446}{1} + 1 = 14447$.

Llama "hypothèses moyennes" a las raíces de la cascada, que van a ser cotas intermedias para las soluciones de la ecuación inicial.

Parte III

Rolle: $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

$$\begin{array}{ll} (a): & y^4 - 62y^3 + 1427y^2 - 14446y + 54264 = 0 \\ (b): & 4y^3 - 186y^2 + 2854y - 14446 = 0 \\ (c): & 12y^2 - 372y + 2854 = 0 \\ (d): & 24y - 372 = 0 \end{array}$$

Resolución: Observemos que si $y = 372/24 = 31/2 = 15{,}5$ es solución de (d), las raíces de (c) están en $[0, 15{,}5]$ y $[15{,}5, 372/12 + 1]$; Rolle procede a calcular las raíces de (c) mediante bisección en esos intervalos; conocidas esas raíces de (c), aproximadamente 14 y 17, se sabe que las raíces de (b) están en los intervalos $[0, 14], [14, 17], [17, 14446/4 + 1]$, en donde se aplica bisección y se sabe que son del orden de 13, 15 y 18. Por tanto, las soluciones buscadas están en los intervalos $[0, 13], [13, 15], [15, 18], [18, 14446/1 + 1]$. Aplicando una nueva tanda de procesos de bisección se llega a que las soluciones buscadas son precisamente $y \in \{12, 14, 17, 19\}$, de modo que las soluciones de la ecuación inicial son $\{3, 1, -2, -4\}$ (ya que $x = 15 - y$).

Algunos cálculos finales, una vez conocida la ubicación de las raíces de la ecuación en y

y	$y^4 - 62y^3 + 1427y^2 - 14446y + 54264$
0	54264
13	-24
6	6864
9	1200
11	144
12	0
15	24
14	0
18	-24
16	24
17	0

Parte IV
Conclusiones: beneficios en la investigación

Lectura de textos históricos: fuente de inspiración para la resolución de problemas o la propuesta de nuevos retos, a partir de su análisis:

☐ Hacer una comparativa entre Clavius y Hérigone sobre la prueba geométrica de la propiedad de números intermedios de Chuquet, partiendo del trabajo de la profesora Massa Esteve:

M.R. Massa-Esteve
The symbolic treatment of Euclid's Elements in Hérigone's Cursus Mathematicus (1634, 1637, 1642)
Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early-Modern Mathematics, 26, pp. 165-191, 2010

☐ Discutir en profundidad la resolución de ecuaciones de Viéte y su generalización en la obra de Hérigone, ver

A. Mellado
La influencia del "Cursus Mathematicus" de Hérigone en la algebrización de la matemática
Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 2022

☐ Estudiar en detalle los trabajos de De Lagny y Halley, y su relación

Beneficios de la historia y su aplicación en el aula. Un posible esquema de actividades puede ser:

1. Contexto histórico, social y alguna biografía de los autores que se vayan a considerar
2. Usar fuentes primarias
3. Precisar el tema matemático y comparar el texto original con el desarrollo actual
4. Adecuación del tema en el aula: ubicar contenidos, saber qué obstáculos se pretenden salvar, plantear unas cuestiones atractivas, ...

En el caso de esta charla, podemos desarrollar el tema sin el concurso del cálculo diferencial. Algunos contenidos que se pueden desarrollar: uso de métodos geométricos y algebraicos; binomio de Newton; tipos de lenguaje y evolución a lo largo de la historia; propiedad de los valores intermedios; aproximación de números irracionales; relación con el cálculo de puntos fijos y con gráficas e iteración.

Algunas conclusiones:

- Suscitar la curiosidad en los alumnos.
- Contextualizar los temas, no “caen” del cielo.
- Benificio indudable en la docencia.
- Advertir de las dificultades epistemológicas.
- Rigurosidad en los desarrollos, no quedarse en la mera anécdota; cultura sólida matemática.
- Sentido de unidad de las matemáticas; contrapeso a la especialización.

¡MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN!