CEMat
IMU
Comité Español de Matemáticas

1ª ESCUELA DE VERANO CEMAT
EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS:
estudio, aplicaciones y enseñanza

Diseño de actividades ricas para el aula a partir de textos históricos relevantes sobre números negativos

Fàtima Romero Vallhonesta <fatima.romerovallhonesta@gmail.com>
Iolanda Guevara Casanova <iguevara@xtec.cat>

A CORUÑA, del 8-10 octubre 2025

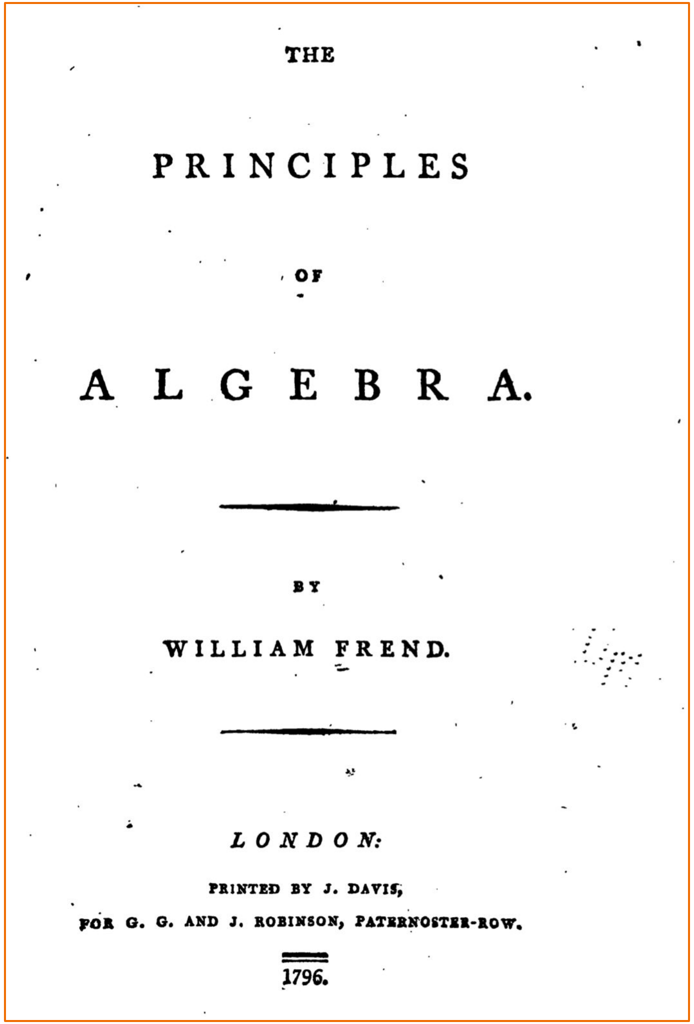
Fundación Luis Seoane-UIMP

Números negativos ¿cuándo y para qué?

Muchos estudiantes tienen problemas para entender y manipular los números negativos. La historia de los números negativos dará al profesorado información adicional para compartir con el alumnado sobre cómo se han presentado problemas similares en el pasado y cómo los han resuelto algunos matemáticos de renombre. Por esta razón analizamos algunos textos sobre números negativos de diferentes épocas y mostramos cómo los trataban los matemáticos de diversas culturas. Estamos convencidos de que el conocimiento de su historia contribuye a la comprensión de las matemáticas.

Todavía dudando de si los números negativos tienen sentido

William Frend (1757 -1841)
Fue un matemático y librepensador que perdió su puesto en la Universidad de Cambridge debido a sus críticas a la iglesia anglicana. Fue profesor de matemáticas de Ada Lovelace, como lo había sido también de su madre, Anne Isabella Byron.


THE

PRINCIPLES

OF

ALGEBRA.

BY

WILLIAM FREND.

LONDON:

PRINTED BY J. DAVIS,

FOR G. G. AND J. ROBINSON, PATERNOSTER-ROW.

1796.

[Frend, 1796, prefacio, X-XI]

«[Un número] puede ser restado de otro número mayor que él, pero intentar restarlo de un número menor que él, es ridículo. Aun así, esto lo intentan los algebristas que hablan de números menores que nada, de multiplicar un número negativo por otro número negativo obteniendo un número positivo; y de números que son imaginarios. Así, hablan de dos raíces de cada ecuación de segundo orden (grado) y el estudiante tiene que resolver una ecuación determinada: hablan de una ecuación que requiere dos raíces imposibles para hacerla resoluble: encuentran números imposibles que multiplicados producen la unidad. Todo esto es jerga ante la cual retrocede el sentido común; pero, una vez adoptada, como muchas otras ficciones, encuentra los más fervorosos partidarios entre aquellos que gustan de aprender las cosas confiados y odian el trabajo de un pensamiento serio».

it ſubmits to be taken away from another number greater than itſelf, but to attempt to take it away from a number leſs than itſelf is ridiculous. Yet this is attempted by algebraiſts, who talk of a number leſs than nothing, of multiplying a negative number into a negative number and thus producing a poſitive number, of a number being imaginary. Hence they talk of two roots to every equation of the ſecond order, and the learner is to try which will ſucceed in a given equation: they talk of ſolving an equation, which requires two

(Frend, 1796, pp. X-XI)

impoſſible roots to make it ſolvible: they can find out ſome impoſſible numbers, which, being multiplied together, produce unity. This is all jargon, at which common ſenſe recoils; but, from its having been once adopted, like many other figments, it finds the moſt ſtrenuous ſupporters among thoſe who love to take things upon truſt, and hate the labour of a ſerious thought.

(Frend, 1796, pp. X-XI)

Números negativos en diferentes culturas

Matemáticos chinos y griegos del s. III e indios del s. VII dieron reglas para trabajar con números negativos, siempre relacionadas con la resolución de ecuaciones.

En Occidente, también se aceptaron cuando se vio que eran imprescindibles para resolver determinados tipos de ecuaciones (s. XII-XVI). La aceptación definitiva no llega hasta el s. XIX, al definirlos como objetos en un sistema puramente simbólico.

Números negativos, instrumentos para el álgebra

En definitiva, se aceptan cuando son necesarios en el proceso de algebrización de las matemáticas.

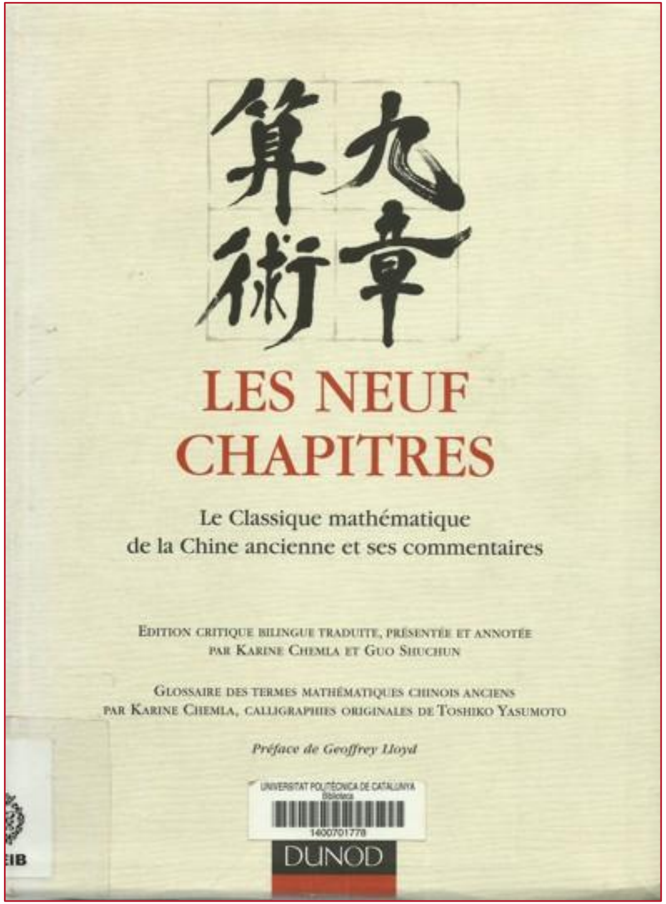
Debe destacarse que en los tratados matemáticos, tanto orientales como occidentales, las reglas de cálculo con números positivos y negativos, se incorporan en los capítulos dedicados al álgebra y no en los de aritmética.

Graduación de la aceptación de los números negativos

1. Pueden aparecer al plantear el problema como «coeficientes a eliminar». Los métodos de resolución de ecuaciones solo incluyen «coeficientes» positivos porque no sirven para contar las incógnitas y además las justificaciones de los procedimientos son geométricas.
2. Como instrumento para resolver todo tipo de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.
3. Como raíces o soluciones de ecuaciones.

Números negativos en la antigua matemática china (s. I dC)

En el siglo I dC. se acabó de compilar el texto matemático que más influencia tuvo en la matemática china, una obra que fue objeto de una importante tradición de comentarios en los siglos posteriores: *Jiuzhang suanshu* o *Los Nueve capítulos sobre los procedimientos matemáticos*.



Los procedimientos de los NC

En el texto clásico (s. II aC- I dC) los problemas constan de un enunciado, la respuesta y el procedimiento (algoritmo de cálculo) para resolverlo. En ningún caso se justifica o demuestra el procedimiento descrito.

Son los comentaristas posteriores los que ven la necesidad de justificar el procedimiento.

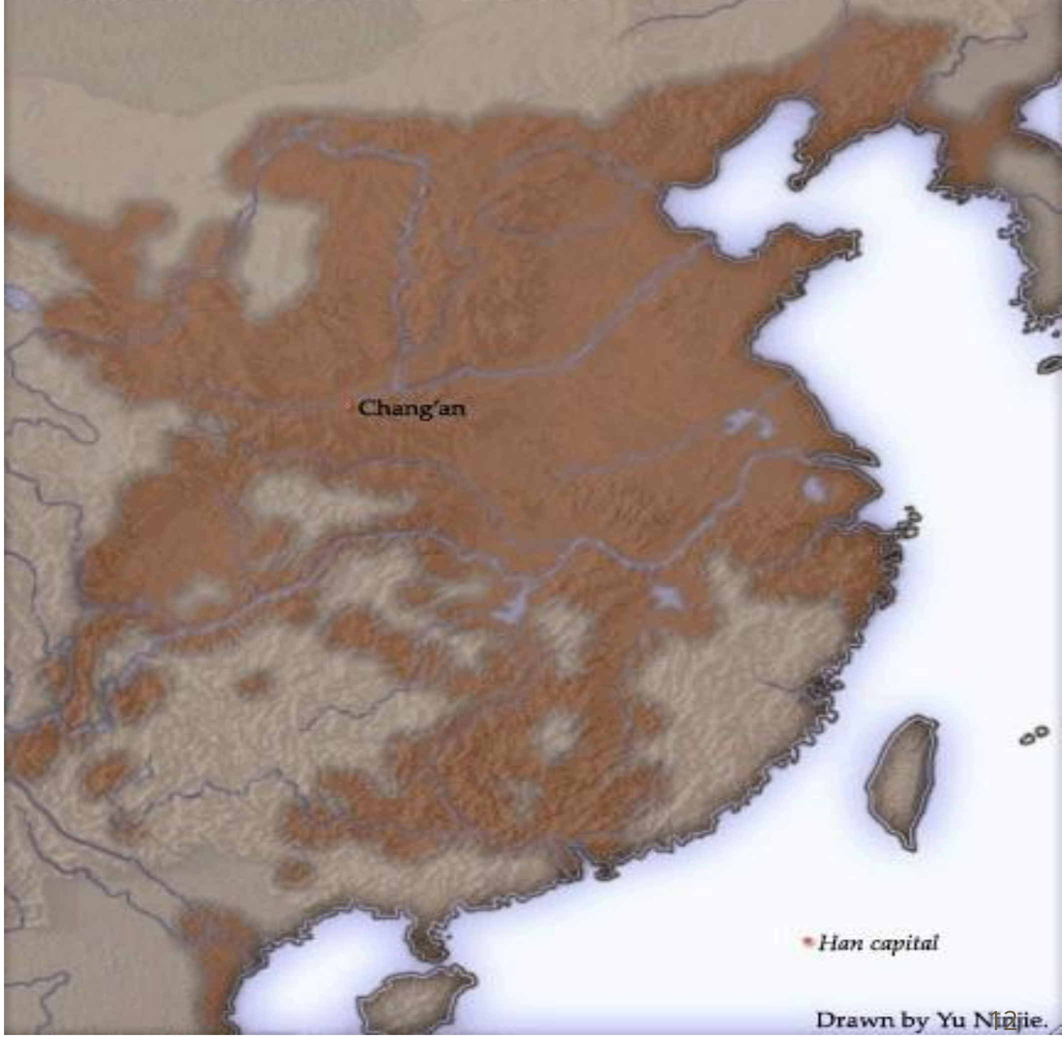
Liu Hui
(220 – 280)

Li Chunfeng
(602 - 670)

Números negativos en la China antigua Lui Hui (220-280)

Liu Hui fue un oficial en el reino de Wei después del derrumbamiento de la dinastía Han.

Xina: dinastia Han del oeste 206 aC – 220 dC



Números negativos en la China antigua

Los Nueve Capítulos sobre los procedimientos matemáticos es el texto de matemáticas chino más antiguo que se conoce, en el que se dan las reglas para sumar y restar números positivos y negativos, así como el uso de números negativos en los coeficientes, si bien no se aceptan soluciones negativas. Están en el capítulo 7, «Excedente y déficit» (ecuaciones lineales) y en el capítulo 8, «Filas rectangulares» (sistemas de ecuaciones).

El procedimiento del positivo y el negativo. Problema 3

En el curso de la eliminación de las incógnitas aparecen coeficientes negativos en problemas en que inicialmente todo era positivo. Son los problemas 3, 12, 13, 14, 16, 17, 18 .

Pero también se proponen problemas en los cuales las ecuaciones que se establecen contienen, desde el comienzo, coeficientes negativos. Son los problemas 4, 5, 6, 8 y 15.

Tanto las reglas que hay que seguir (texto clásico) como las justificaciones de los comentaristas (Lui Hui) se enmarcan en el problema 3, que es la primera vez en qué aparecen.

今有上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉，實皆不滿斗。上取中、中取下、下取上各一秉而實滿斗。問上、中、下禾實一秉各幾何。

荅曰：

上禾一秉實二十五分斗之九，

中禾一秉實二十五分斗之七，

下禾一秉實二十五分斗之四。

術曰：如方程。各置所取。置上禾二秉爲右行之上，中禾三秉爲中行之中，下禾四秉爲左行之下。所取一秉及實一斗各從其位。諸行相借取之物，皆依此例。以正負術入之。

正負術曰：今兩算得失相反，要令正負以名之。正算赤，負算黑，否則以邪正爲異。方程自有赤、黑相取，法、實數相推求之術[二八]。而其并減之勢不得廣通[二九]，故使赤、黑相消奪之。於算或減或益，同行異位殊爲二品，各有并、減，之差見於下焉。著此二條，特繫之禾以成此二條之意。故赤、黑相雜足以定上下之程，減、益雖殊足以通左右之數，差、實雖分足以應同異之率。然則其正無入以負之[三〇]，負無入以正之[三一]，其率不妄也。同名相除，此謂以赤除赤[三二]，以黑除

[二八] 法實，戴震輯錄本訛作“左右”。滙校本依李潢所引恢復大典本及楊輝本原文。
[二九] 廣通，戴震輯錄本訛作“交通”。錢校本依李潢所引恢復大典本及楊輝本原文。
[三〇] 此八“入”字，大典本、楊輝本訛作“人”。楊輝本注中校正。戴震亦校正。
[三一] 大典本脱“負無入以正之”六字。戴震補“負無入正之”，删上句之“以”字。滙校本恢復大典本、楊輝本之上句原文，依例補此句。
[三二] 謂，戴震輯錄本訛作“爲”。此依楊輝本。

(8.3)

SUPPOSONS QU'ON AIT 2 *BING* DE MILLET DE QUALITÉ SUPÉRIEURE, 3 *BING* DE MILLET DE QUALITÉ MOYENNE, 4 *BING* DE MILLET DE QUALITÉ INFÉRIEURE, DONT LES PRODUCTIONS (*SHI*) NE REMPLISSENT DANS AUCUN CAS LE *DOU*. SI AVEC (LE MILLET) DE QUALITÉ SUPÉRIEURE ON PREND (DU MILLET) DE QUALITÉ MOYENNE, AVEC (LE MILLET) DE QUALITÉ MOYENNE ON PREND (DU MILLET) DE QUALITÉ INFÉRIEURE, ET (AVEC LE MILLET) DE QUALITÉ INFÉRIEURE ON PREND (DU MILLET) DE QUALITÉ SUPÉRIEURE, À CHAQUE FOIS À RAISON DE 1 *BING*, ALORS LA PRODUCTION (*SHI*) REMPLIT UN *DOU*. ON DEMANDE COMBIEN PRODUISENT (*SHI*) RESPECTIVEMENT UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ SUPÉRIEURE, MOYENNE ET INFÉRIEURE.

RÉPONSE : UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ SUPÉRIEURE PRODUIT (*SHI*) 9/25 DE *DOU* ;
UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ MOYENNE PRODUIT (*SHI*) 7/25 DE *DOU* ;
UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ INFÉRIEURE PRODUIT (*SHI*) 4/25 DE *DOU*.

PROCÉDURE : ON SUIT *FANGCHENG*. ON PLACE RESPECTIVEMENT CE QUI EST PRIS[40],

On place les 2 *bing* de millet de qualité supérieure comme (position) supérieure de la colonne de droite, les 3 *bing* de millet de qualité moyenne comme (position) centrale de la colonne centrale, les 4 *bing* de millet de qualité inférieure comme (position) inférieure de la colonne de gauche, les 1 *bing* qui sont pris et les productions/dividendes (*shi*) de 1 *dou* se conforment chacun à la position qui leur correspond. Tous les (cas) où des colonnes s'empruntent les unes aux autres les types de choses qui sont prises s'appuient sur cet exemple[41].

ET ON Y INTRODUIT LA PROCÉDURE DU POSITIF ET DU NÉGATIF[42].

PROCÉDURE DU POSITIF ET DU NÉGATIF :

Si deux sortes de nombres représentés par des baguettes, ce qu'on acquiert et ce qu'on perd, sont opposées l'une à l'autre, il faut se servir de « positif » et « négatif » pour les nommer[43]. Les nombres représentés par baguettes positifs sont incarnats, les nombres représentés par baguettes négatifs noirs. Sinon, on les différencie en recourant à l'opposition oblique/droit[44].

Fangcheng consiste, par nature, en une procédure où incarnat et noir sont obtenus l'un en fonction de l'autre, et où les valeurs (*shu*) des diviseurs et des dividendes (*shi*) se déduisent les unes des autres[45]. Mais son dispositif (*shi'*) d'addition et de soustraction ne peut s'étendre en toute généralité[46]. C'est pourquoi l'on fait que (baguettes) incarnates et noires se retranchent et se fassent disparaître (*xiaoduo*) les unes les autres. Si pour ce qui est des calculs, parfois on soustrait et parfois on augmente, dans une même colonne, à des positions distinctes, on différencie en faisant deux catégories, alors chacune a une somme, on soustrait celles-ci, et la différence apparaît en bas[47]. L'on a donc composé ces 2 clauses ; et on les a reliées à dessein au (cas) de millets pour élaborer la signification (*yi*) de ces 2 clauses[48]. En conséquence le fait que (baguettes) incarnates et noires soient mêlées les unes aux autres[49], cela suffit pour déterminer les mesures de bas en haut ; soustraire et augmenter, quoique de manière différente (de ce qui précède), suffisent pour faire communiquer les quantités (*shu*) de droite et de gauche[50] ; différences et dividendes/productions (*shi*), quoique de manière distincte, suffisent pour faire se correspondre les *lü* identiques et différents[51]. S'il en est ainsi, alors si « quand le positif n'a pas où entrer, on le rend négatif et que quand le négatif n'a pas où entrer, on le rend positif »[52], les *lü* correspondants ne sont pas aberrants.

(Chemla y Shuchun, 2005, pp. 625)

(8.3) (Chemla y Shuchun, 2005, p. 625)

SUPPOSONS QU'ON AIT 2 *BING* DE MILLET DE QUALITÉ SUPÉRIEURE, 3 *BING* DE MILLET DE QUALITÉ MOYENNE, 4 *BING* DE MILLET DE QUALITÉ INFÉRIEURE, DONT LES PRODUCTIONS (*SHI*) NE REMPLISSENT DANS AUCUN CAS LE *DOU*. SI AVEC (LE MILLET) DE QUALITÉ SUPÉRIEURE ON PREND (DU MILLET) DE QUALITÉ MOYENNE, AVEC (LE MILLET) DE QUALITÉ MOYENNE ON PREND (DU MILLET) DE QUALITÉ INFÉRIEURE, ET (AVEC LE MILLET) DE QUALITÉ INFÉRIEURE ON PREND (DU MILLET) DE QUALITÉ SUPÉRIEURE, À CHAQUE FOIS À RAISON DE 1 *BING*, ALORS LA PRODUCTION (*SHI*) REMPLIT UN *DOU*. ON DEMANDE COMBIEN PRODUISENT (*SHI*) RESPECTIVEMENT UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ SUPÉRIEURE, MOYENNE ET INFÉRIEURE.

RÉPONSE : UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ SUPÉRIEURE PRODUIT (*SHI*) 9/25 DE *DOU* ;
UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ MOYENNE PRODUIT (*SHI*) 7/25 DE *DOU* ;
UN *BING* DE MILLET DE QUALITÉ INFÉRIEURE PRODUIT (*SHI*) 4/25 DE *DOU*.

PROCÉDURE : ON SUIT *FANGCHENG*. ON PLACE RESPECTIVEMENT CE QUI EST PRIS[40],

On place les 2 *bing* de millet de qualité supérieure comme (position) supérieure de la colonne de droite, les 3 *bing* de millet de qualité moyenne comme (position) centrale de la colonne centrale, les 4 *bing* de millet de qualité inférieure comme (position) inférieure de la colonne de gauche, les 1 *bing* qui sont pris et les productions/dividendes (*shi*) de 1 *dou* se conforment chacun à la position qui leur correspond. Tous les (cas) où des colonnes s'empruntent les unes aux autres les types de choses qui sont prises s'appuient sur cet exemple[41].

ET ON Y INTRODUIT LA PROCÉDURE DU POSITIF ET DU NÉGATIF[42].

PROCÉDURE DU POSITIF ET DU NÉGATIF :

Si deux sortes de nombres représentés par des baguettes, ce qu'on acquiert et ce qu'on perd, sont opposées l'une à l'autre, il faut se servir de « positif » et « négatif » pour les nommer[43]. Les nombres représentés par baguettes positifs sont incarnats, les nombres représentés par baguettes négatifs noirs. Sinon, on les différencie en recourant à l'opposition oblique/droit[44].

Fangcheng consiste, par nature, en une procédure où incarnat et noir sont obtenus l'un en fonction de l'autre, et où les valeurs (*shu*) des diviseurs et des dividendes (*shi*) se déduisent les unes des autres[45]. Mais son dispositif (*shi'*) d'addition et de soustraction ne peut s'étendre en toute généralité[46]. C'est pourquoi l'on fait que (baguettes) incarnates et noires se retranchent et se fassent disparaître (*xiaoduo*) les unes les autres. Si pour ce qui est des calculs, parfois on soustrait et parfois on augmente, dans une même colonne, à des positions distinctes, on différencie en faisant deux catégories, alors chacune a une somme, on soustrait celles-ci, et la différence apparaît en bas[47]. L'on a donc composé ces 2 clauses ; et on les a reliées à dessein au (cas) de millets pour élaborer la signification (*yi*) de ces 2 clauses[48]. En conséquence le fait que (baguettes) incarnates et noires soient mêlées les unes aux autres[49], cela suffit pour déterminer les mesures de bas en haut ; soustraire et augmenter, quoique de manière différente (de ce qui précède), suffisent pour faire communiquer les quantités (*shu*) de droite et de gauche[50] ; différences et dividendes/productions (*shi*), quoique de manière distincte, suffisent pour faire se correspondre les *lü* identiques et différents[51]. S'il en est ainsi, alors si « quand le positif n'a pas où entrer, on le rend négatif et que quand le négatif n'a pas où entrer, on le rend positif »[52], les *lü* correspondants ne sont pas aberrants.

(Chemla y Shuchun, 2005, pp. 625)

Coeficientes negativos en el capítulo 8, problema 8

PROBLEMA 8.8

SUPONGAMOS QUE SI SE VENDEN 2 BUEYES Y 5 OVEJAS PARA COMPRAR 13 CERDOS, QUEDAN 1000 SAPEQUES (FĀNG KǑNG QIÁN)*, QUE SI SE VENDEN 3 BUEYES Y 3 CERDOS PARA COMPRAR 9 OVEJAS, SE TIENEN JUSTO SUFICIENTES SAPEQUES, Y QUE SI SE VENDEN 6 OVEJAS Y 8 CERDOS PARA COMPRAR 5 BUEYES, SE TIENE UN DÉFICIT DE 600 SAPEQUES. SE PIDE CUALES SON RESPECTIVAMENTE LOS PRECIOS DE UN BUEY, UNA OVEJA Y UN CERDO.

*La **sapeca** (chino simplificado: 方 孔 钱; chino tradicional: 方 孔 錢; pinyin: : *fāng kǒng qián*) es el nombre de una antigua moneda china (literalmente «dineros con agujero cuadrado»).

Coeficientes negativos en el capítulo 8, problema 8

SE SITÚAN LOS 2 BUEYES Y LAS 5 OVEJAS EN POSITIVO, LOS 13 CERDOS EN NEGATIVO, LA CANTIDAD (SHU) DE SAPEQUES RESTANTES EN POSITIVO. ENTONCES, LOS 5 BUEYES EN NEGATIVO, LAS 6 OVEJAS EN POSITIVO, LOS 8 CERDOS EN POSITIVO, LAS SAPEQUES DEL DÉFICIT EN NEGATIVO. Y SE INTRODUCE EL PROCEDIMIENTO DEL POSITIVO Y DEL NEGATIVO.

2 bueyes + 5 ovejas - 13 cerdos = 1000

3 bous - 9 ovejas + 3 cerdos = 0 en notación actual

\- 5 bueyes + 6 ovejas + 8 cerdos = -600

Símbolos y números negativos en la *Arithmetica* de Diofanto (220-284)

Fue uno de los primeros matemáticos en utilizar símbolos en sus cálculos. Utilizaba símbolos para la cantidad desconocida y para potencias de la cantidad desconocida hasta el sexto orden, así como un signo para el menos.

En la *Arithmetica*, Diofanto describe métodos para resolver ecuaciones polinómicas con coeficientes tanto positivos como negativos pero los negativos deben ser eliminados.

Números negativos en Alejandría. Diofanto (220-284)

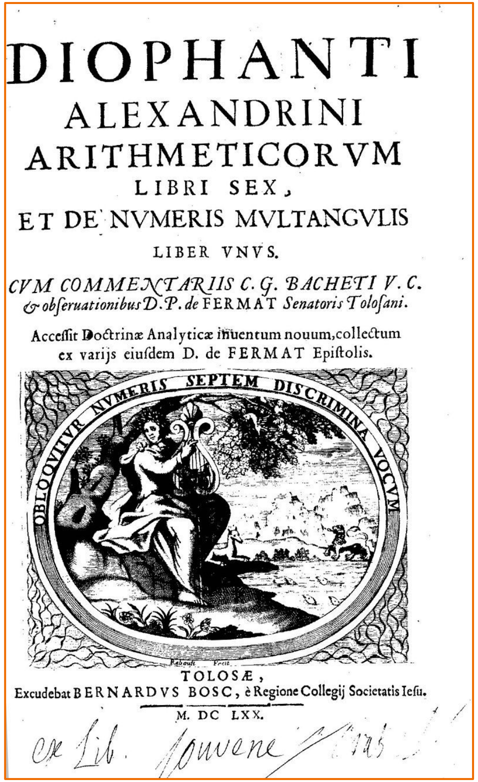
Mapa de la Antigua Grecia (Serres, 1991)

La *Arithmetica* de Diofanto

La obra se compone de trece libros, de los cuales solo se conservan seis en griego antiguo y otros cuatro libros en árabe, probablemente una traducción de Qusta ibn Luqa al-Ba’albakki

libros en griego I, II, III, VIII, IX y X

libros en árabe IV, V, VI y VII,


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Portada de la edición bilingüe publicada el 1670 por Claude Bachet.

Regla de los signos

«Estaría bien que cuando uno empezara este estudio hubiera adquirido cierta práctica en la adición, sustracción y multiplicación de las varias especies [tipos de términos]. Tendría que saber cómo sumar términos positivos y negativos con coeficientes diferentes a otros términos, positivos o negativos o en parte positivos y en parte negativos, y cómo restar desde una combinación de términos positivos y negativos otros términos algún positivo o del mismo modo en parte positivo y en parte negativo».

Regla de los signos

Diophantus proceeds: "It is well that one who is beginning this study should have acquired practice in the addition, subtraction and multiplication of the various species. He should know how to add positive and negative terms with different coefficients to other terms[1], themselves either positive or likewise partly positive and partly negative, and how to subtract from a combination of positive and negative terms other terms either positive or likewise partly positive and partly negative.

(Heath, 1910, pp. 130-131)

Reglas de los signos

Sign of Subtraction (*minus*).

"*A minus multiplied by a minus makes a plus*[1]; *a minus multiplied by a plus makes a minus; and the sign of a minus is a truncated* Ψ *turned upside down, thus* ⋔."

[1] The literal rendering would be "A wanting multiplied by a wanting makes a forthcoming." The word corresponding to *minus* is λεῖψις ("wanting"): when it is used exactly as our *minus* is, it is in the dative λείψει, but there is some doubt whether Diophantus himself used this form (cf. p. 44 above). For the probable explanation of the sign, see pp. 42–44. The word for "forthcoming" is ὕπαρξις, from ὑπάρχω, to exist. Negative terms are λείποντα εἴδη, and positive ὑπάρχοντα.

(Heath, 1910, p. 130)

Reglas para resolver ecuaciones con coeficientes negativos

«Si un problema lleva a una ecuación en la cual ciertos términos son iguales a términos de la misma especie pero con coeficientes diferentes, será necesario restar en los dos lados, hasta que un término se encuentre igual en otro término. Si sucede que en cualquier lado o en los dos lados hay términos negativos, será necesario añadir cantidades a los términos negativos de los dos lados hasta que los términos en los dos lados sean positivos, y entonces otra vez restar hasta que solo quede un término en cada lado».

Reglas para resolver ecuaciones con coeficientes negativos

"Next, if a problem leads to an equation in which certain terms are equal to terms of the same species but with different coefficients, it will be necessary to subtract like from like on both sides, until one term is found equal to one term. If by chance there are on either side or on both sides any negative terms, it will be necessary to add the negative terms on both sides, until the terms on both sides are positive, and then again to subtract like from like until one term only is left on each side.

"This should be the object aimed at in framing the hypotheses of propositions, that is to say, to reduce the equations, if possible, until one term is left equal to one term; *but I will show you later how, in the case also where two terms are left equal to one term, such a problem is solved.*"

(Heath, 1910, p. 131)

Negativos para operar pero no como soluciones

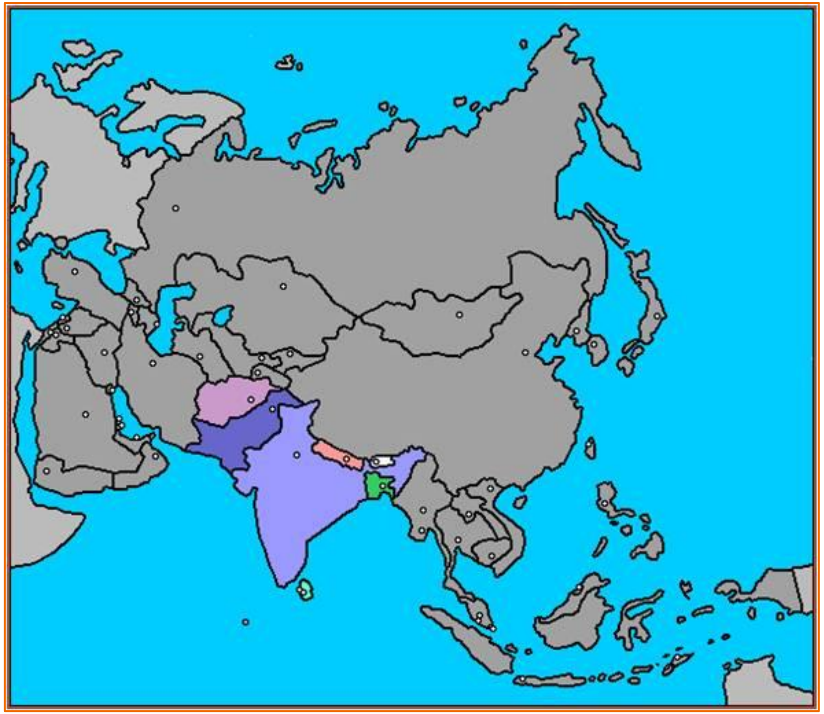
Aunque Diofanto utilizaba números negativos en sus cálculos no reconoce un número negativo como solución válida a una ecuación.

En su *Arithmetica*, incluso manifiesta que la solución, $x = -4$, a la ecuación $4x + 20 = 4$ es «absurda».

Sus reglas para multiplicar con números positivos y negativos se manifiestan como el «producto de próximo [positivo] y esperado [negativo] igual al esperado [negativo], y el producto de dos esperados [negativos] igual a próximo [positivo]».

Antigua India = Subcontinent indi

India, Nepal, Paquistán, Bangladesh i Sri Lanka



Brahmagupta (598-670)

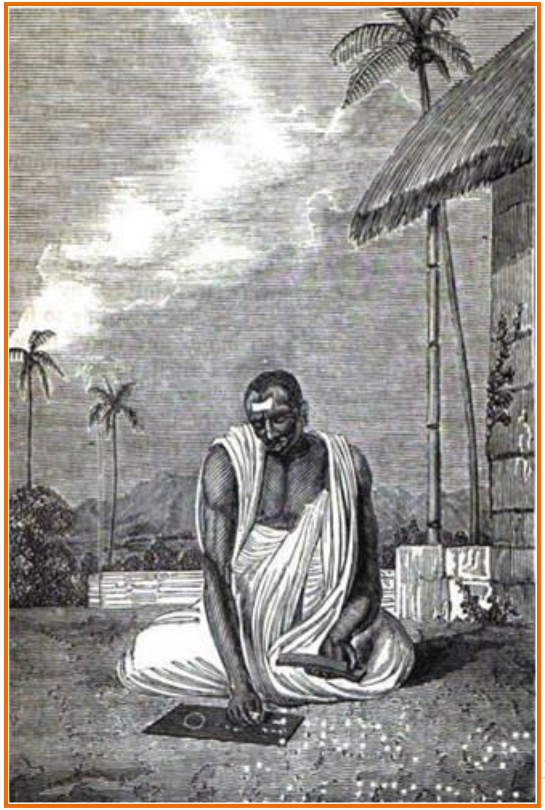
Nace, hacia el año 598 Bhillamala (Bhinmal, Rajastán).

Su padre, Jishnugupta, era mercader o campesino (sufijo “gupta”; tercera casta vaisies).

Conoce escritos de matemáticos griegos:

- Herón de Alejandría (s.I)
- Ptolomeo (s.II)
- Diofant (s.III)

además de matemáticos indios (Aryabhata o Varahamihira).



19th-century illustration of a Hindu astronomer. Original caption: "Dybuck, an astronomer, calculating an Eclipse”.

Brahma-sphuṭa-siddhanta (c. 628)

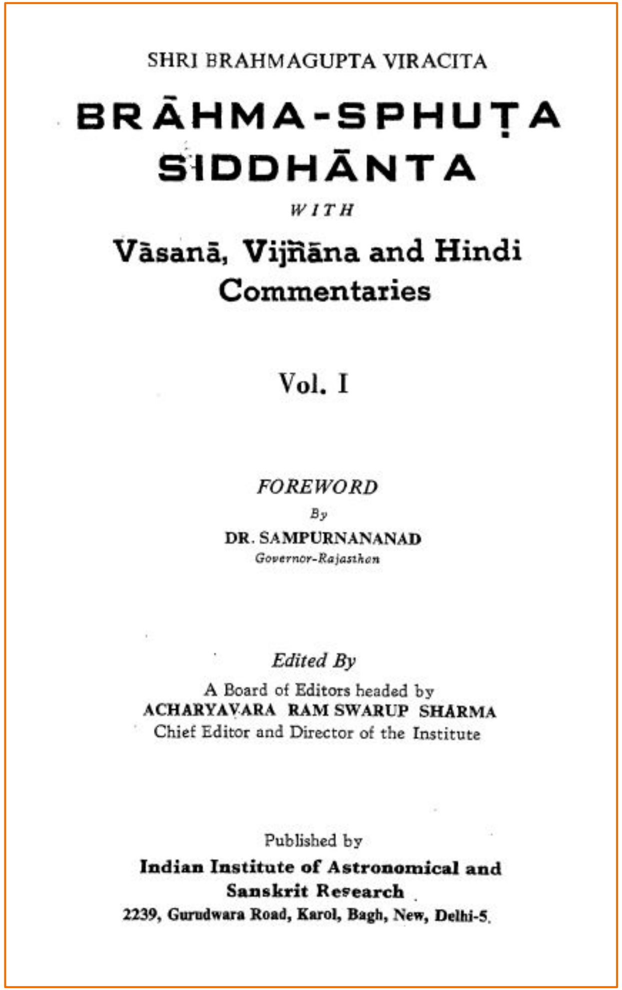
Capítulos 1-10: temas básicos de astronomía
Capítulo 11: crítica al *Aryabhatiya*
Capítulo 12: aritmètica o *ganita*
Capítulos 13-17: altres temes d'astronomia
Capítulo 18: cálculo con incógnitas

……

Capítulo 21: construcción del sinus

Khanda-khadyaka (c. 665)

Karana o manual de cálculo para temas de astronomía (razones trigonométricas).


SHRI BRAHMAGUPTA VIRACITA

BRĀHMA-SPHUṬA SIDDHĀNTA

WITH

Vāsanā, Vijñāna and Hindi Commentaries

Vol. I

FOREWORD

By

DR. SAMPURNANANAD

Governor-Rajasthan

Edited By

A Board of Editors headed by
ACHARYAVARA RAM SWARUP SHARMA
Chief Editor and Director of the Institute

Published by
Indian Institute of Astronomical and Sanskrit Research
2239, Gurudwara Road, Karol, Bagh, New, Delhi-5.

Capítulo 18: *kuttaka*

Cálculo con incógnitas, de primero y de segundo grado.
Kuttaka o “pulverizador”, método de cálculo para tratar ecuaciones o sistemas de ecuaciones indeterminados. El capítulo se inicia con los propósitos y contenido (versos 1-2).

«Un maestro [acarya] entre los que conocen los tratados se caracteriza para conocer el pulverizador, el cero, [cantidades] positivas y negativas, incógnitas, eliminación del [término] medio, [esto es, la solución de la ecuación de segundo grado], color-único, [ecuaciones o ecuaciones con una sola incógnita], producto de incógnitas, así como naturaleza cuadrática [problemas con ecuaciones indeterminadas de segundo grado]».
(Trad. Plofker, 2009, p. 150)

Brahmagupta has in his Chaper XVIII devoted a special section entitled "*Dhanarṇa Śunyānām Samkalanam*" or calculations dealing with quantities bearing positive and negative signs and zero,

---

1. अव्यक्तान्तरं भक्तं व्यस्तं रूपान्तरं समेऽव्यक्तः । —*BrSpSi* XVIII. 43
   वर्गं चतुर्गुणितानां रूपाणां मध्यवर्गं सहितानाम् ॥ —*BrSpSi* XVIII. 44

2. यावत्-तावत् कालको नीलकोऽन्यो वर्णः पीतो लोहितश्चैतदाद्याः ।
   अव्यक्तानां कल्पिता मानसंज्ञास्तत्संख्यानं कर्तुमाचार्यवर्यैः ॥
   यावत्-तावत् कालक नीलक पीतास्च लोहितो हरितः ।
   श्वेतक चित्रक कपिलक पाटलकाः पण्डु धूम्र शवलाश्च ॥
   श्यामलक-मेचक-धवलक-पिशङ्ग-शारङ्ग-बभ्रु गौराद्याः । —Nārāyaṇa, *Bījagaṇita*

3. *BrSpSi XII. 15.* (Com.) ; XII 18.

(Sharma, S.R.S 1966, p.201)

Capítulo 18: *kuttaka* (versos 30-35)

Aritmética de los números positivos, negativos y el cero:

> «La suma de dos números positivos es positiva,
> la de números negativos es negativa;
> De un positivo y un número negativo es su diferencia.
> En la sustracción, el menos tiene que tomar del más grande.
> [El resultado final es] positivo, si se ha sacado del positivo,
> Y negativo, si se ha hecho del negativo.
> Si, aún así, el más grande se resta desde el menos,
> Aquella diferencia se invierte [en signo],
> El negativo se vuelve positivo y el positivo se convierte en negativo.
> Cuando el positivo se resta del negativo o el negativo del positivo,
> Entonces se tienen que añadir juntos».

Regarding *addition*, Brahmagupta says :

> The sum of two positive numbers is positive, of two negative numbers is negative; of a positive and negative number is the difference[1].

Regarding *subtraction*, Brahmagupta further says :

> From the greater should be subtracted the smaller; (the final result is) positive, if positive from positive, and negative, if negative, from negative. If, however, the greater is subtracted from the less, that difference is reversed (in sign), negative becomes positive and positive becomes negative. When positive is to be subtracted from negative or negative from positive, then they must be added together[2].

(Sharma, S.R.S 1966, p.201)

Mahāvīra (850 A. D.), Bhāskara II (1150 A.D.) and Nārāyaṇa (1350 A. D.) have also given similar rules regarding addition (*Saṁkalanam*) and the subtraction (*vyavakalanam*).

Capítulo 18: *kuttaka* (versos 30-35)

Las reglas para la multiplicación y división de números con signo:

El producto de un positivo y un negativo [número] es negativo;

De dos negativos es afirmativo;

El positivo multiplicado por positivo es afirmativo.

El positivo dividido por positivo o negativo por negativo es afirmativo.

Positivo dividido por negativo, es negativo.

También daba una regla para funcionar con los cuadrados de los números con signo:

La raíz cuadrada de un positivo es negativa o positiva

Y más abajo añade que: un negativo no tiene raíz cuadrada.

Again, the rule given by Brahmagupta regarding *Multiplication* is as follows :

> The product of a positive and a negative (number) is negative; of two negatives is positive; positive multiplied by positive is positive[3].

His rule regarding *division* is as follows ;

> Positive divided by positive or negative divided by negative becomes positive. But positive divided by negative and negative divided by positive remains negative[4].

Similar rules for multiplication and division were provided by later authorities as Mahāvīra and Ḅhāskara II.

(Sharma, S.R.S 1966, p.202)

Brahmagupta lays down the rules regarding *evolution* and *involution* as follows :

> The square of a positive or a negative number is positive .....The (sign of the) root is the same, as was that from which the square was derived[1].

As regards the latter portion of this rule, Pṛthūdaka Svāmī has the following comment to make : "The square-root should be taken either negative or positive, as will be most suitable for subsequent operations to be carried on."

It will be interesting to observe the following observation of Mahāvīra (850 A. D.) regarding square-root of a negative quantity "Since a negative number by its own nature is not a square, it has no square-root."[2] So says Śrīpati : "A negative number by itself is non-square, so its square-root is unreal; so the rule (for the square-root) should be applied in the case of a positive number."[3]

(Sharma, S.R.S 1966, p.202)

Capítulo 18: *kuttaka* (versos 30-35)

También estableció reglas para trabajar con el cero:
«La suma de dos ceros es cero.
Cero menos cero es cero.
El producto de cero con un positivo es cero; el de cero con un negativo es cero y el de dos ceros es cero.
Cero dividido entre cero es cero.
Una cantidad dividida por cero, no está claro qué da, ni como cantidad, ni cómo qué signo debe tener».

> A positive divided by a positive or a negative divided by a negative is positive; a zero divided by a zero is zero; a positive divided by a negative is negative; a negative divided by a positive is [also] negative.
>
> A negative or a positive divided by zero has that [zero] as its divisor, or zero divided by a negative or a positive [has that negative or positive as its divisor]. The square of a negative or of a positive is positive; [the square] of zero is zero. The square root of a square [is] what that [squared quantity is].

Note that a nonzero quantity divided by zero seems to remain somehow "zero-divided"; it is not clear whether the quantity is considered unchanged by the division by zero. The last sentence appears to indicate that the sign of a square's square root corresponds to that of the original quantity that was squared. Note also that the sequence of elementary operations now ends with the square root; cubing and cube root are omitted from algebra, presumably because no standard method exists for determining the cube root of an unknown quantity (i.e., there is no general solution of the cubic).

(Plofker, 2009, 151)

Soluciones negativas en la resolución ecuaciones: Bhaskara II (1114-1185)

Resuelve ecuaciones cuadráticas que incluyen soluciones negativas. Aunque trabaja con números negativos, los denominaba inadecuados. Cuando llega a las soluciones, $x = 50$ y $x = -5$ para la ecuación cuadrática $x^2 - 45x - 250 = 0$, concluye: «El segundo valor en este caso no se toma, porque es inadecuado; la gente no aprueba soluciones negativas».

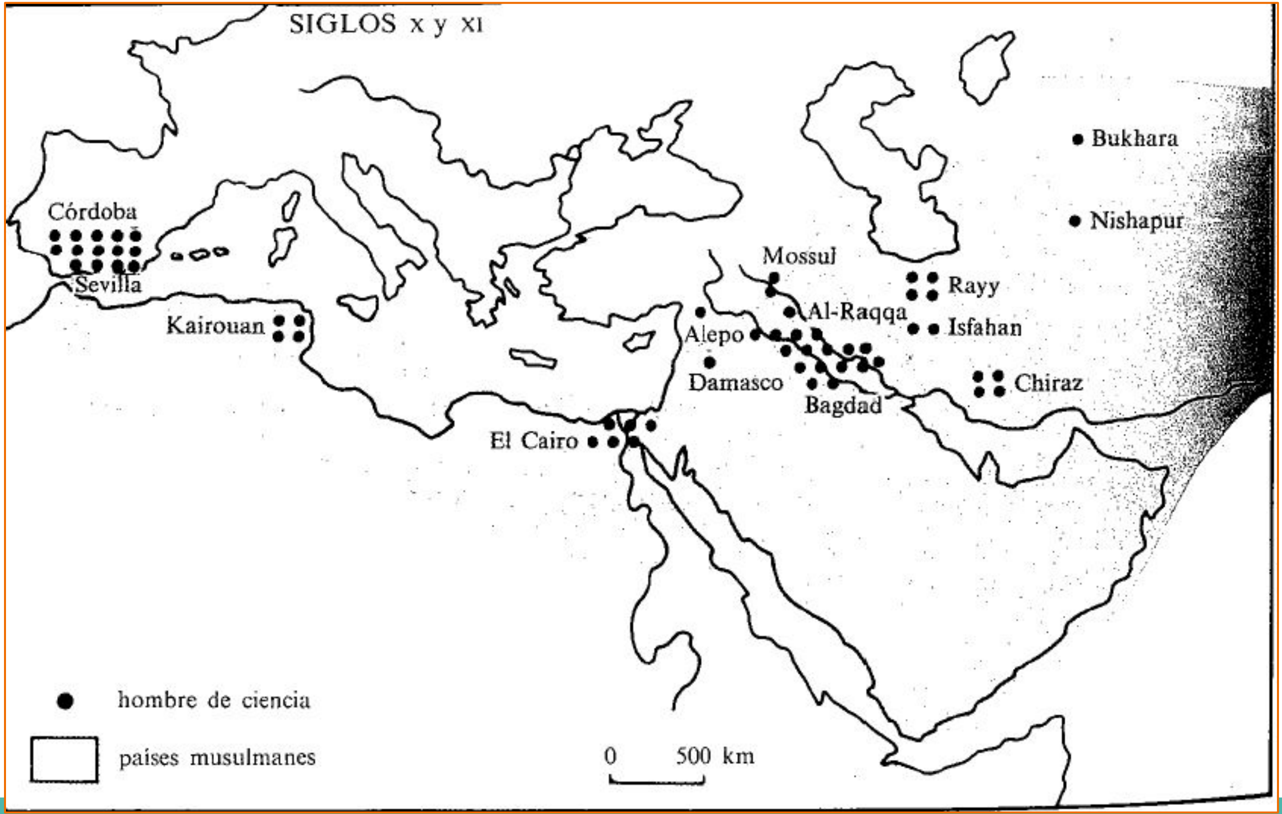
Bhaskara y sus contemporáneos casi siempre tratan con problemas que describen objetos físicos, de forma que una solución negativa a menudo no tenía sentido.

Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (aprox. 780 – 850)

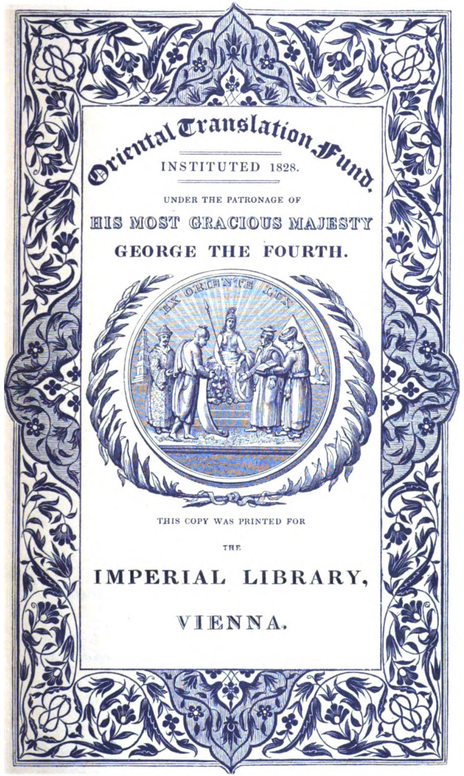
Al-Khwârizmî, matemático de la Casa de la Sabiduría de Bagdad, había estudiado matemáticas griegas i indias antes de escribir su propio texto, la obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813), que fue traducida al latín por Roberto de Chester con el título *Liber algebrae et almucabala* (Segovia, 1145). De *al-jabr* deriva nuestra palabra “álgebra”, y de su nombre, la palabra “algoritmo”. Se sabe poco de su vida, pero las traducciones de sus obras nos han permitido acercanos a sus matemáticas.

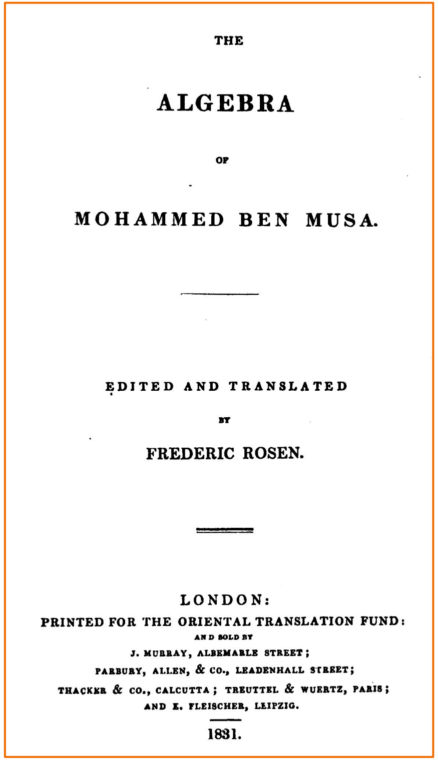
Monumento a **al-Khwârizmî** en la Ciudad Universitaria de Madrid

Las Matemáticas en el Mundo Árabe



El Álgebra traducida al inglés y comentada por Frederic Rosen (1881)


Oriental Translation Fund.
INSTITUTED 1828.
UNDER THE PATRONAGE OF
HIS MOST GRACIOUS MAJESTY
GEORGE THE FOURTH.
EX ORIENTE LUX
THIS COPY WAS PRINTED FOR
THE
IMPERIAL LIBRARY,
VIENNA.


THE

ALGEBRA

OF

MOHAMMED BEN MUSA.

EDITED AND TRANSLATED

BY

FREDERIC ROSEN.

LONDON:
PRINTED FOR THE ORIENTAL TRANSLATION FUND:
AND SOLD BY
J. MURRAY, ALBEMARLE STREET;
PARBURY, ALLEN, & CO., LEADENHALL STREET;
THACKER & CO., CALCUTTA; TREUTTEL & WUERTZ, PARIS;
AND E. FLEISCHER, LEIPZIG.
1831.

La regla de los signos en Al-Khwarizmi

In the same manner, if you multiply a unit less one-sixth by a unit less one-sixth, the product will be the same as $\frac{5}{6}$ multiplied by its equal. Whence this product equals 25 thirty-sixths of one unit, *i.e.* $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{6}$ of one-sixth.

Now the method of this multiplication is that you multiply unit by unit, giving unit; then negative one-sixth by unit, giving negative one-sixth; then you multiply a unit by negative one-sixth, giving one-sixth negative. Therefore two-thirds of one unit remain. And negative one-sixth multiplied by negative one-sixth produces one-sixth of one-sixth positive. The sum total therefore amounts to $\frac{2}{3}$ and one-sixth of one-sixth.[3]

La regla de los signos en Al-Khwarizmi

$$\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

Del mismo modo, si multiplicas una unidad menos un sext
por una unidad menos un sexto, el producto será el mismo
que si se multiplican cinco sextos por su igual. De dónde
este producto es igual a 25 treintaiseisavos de una unidad.
La explicación retórica de Al-Khwarizmi en notación actua

$$1\cdot 1=1$$

$$-\frac{1}{6}\cdot 1=-\frac{1}{6}$$

$$1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{6}$$

Quedan, entonces (1-1/3), dos tercios de la unidad.

Un sexto negativo por un sexto negativo producen un sexto de un sexto positivo.
La suma total será dos tercios y un sexto de un sexto.

$$\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{36}=\frac{25}{36}\right]$$

[Al-Kwharizmi, 1915, 93]

La resolución de ecuaciones: restauración i reducción

Al-jabr significa restauración, *al-muqabala* significa reducción.
En la ecuación $6x^2 - 4x + 1 = 5x^2 + 3$, *al-jabr* se aplica per añadir 4x a ambos lados para obtener la ecuación: $6x^2 + 1 = 5x^2 + 4x + 3$. Después de la restauración, todos los términos son positivos.
Al-muqabala se utilitzaría, entonces, para restar a ambos lados, obteniendo la ecuación $x^2 = 4x + 2$. Esta reducción da lugar a una de las formas estándar para las cuales se tiene el algoritmo de resolución, en este caso corresponde al sexto caso, como veremos a continuación.

Los seis tipos de ecuaciones de al-Khwârizmî

1. Cuadrados = raíces ($ax^2 = bx$)
2. Cuadrados = números ($ax^2 = c$)
3. Raíces = números ($bx = c$)
4. Un cuadrado y raíces= números ($x^2 + bx = c$)
5. Un cuadrado y números = raíces ($x^2 + c = bx$)
6. Raíces y números = un cuadrado ($bx + c = x^2$)

Squares equal to roots,
Squares equal to numbers, and
Roots equal to numbers.[2]

A square and roots equal to numbers,
A square and numbers equal to roots, and
Roots and numbers equal to a square.[8]

[Al-Kwharizmi, 1915, 71]

El método para resolver el quinto tipo

[Al-Khwarizmi, 1915, 75]

CHAPTER V

Concerning squares and numbers equal to roots

The following is an illustration of this type: a square and 21 units equal 10 roots.[1] The rule for the investigation of this type of equation is as follows: what is the square which is such that when you add 21 units the sum total equals 10 roots of that square? The solution of this type of problem is obtained in the following manner. You take first one-half of the roots, giving in this instance 5, which multiplied by itself gives 25. From 25 subtract the 21 units to which we have just referred in connection with the squares. This gives 4, of which you extract the square root, which is 2. From the half of the roots, or 5, you take 2 away, and 3 remains, constituting one root of this square which itself is, of course, 9.[2]

If you wish you may add to the half of the roots, namely 5, the same 2 which you have just subtracted from the half of the roots. This give 7, which stands for one root of the square, and 49 completes the square.[3] Therefore when any problem of this type is proposed to you, try the solution of it by addition as we have said. If you do not solve it by addition, without doubt you will find it by subtraction. And indeed this type alone requires both addition and subtraction, and this you do not find at all in the preceding types.[4]

El método para resolver el quinto tipo

$$x^2 + c = bx$$

$x^2+21=10x$

$\frac{10}{2} = 5$; $5^2=25$; $25-21=4$; $\sqrt{4} = 2$; $5-2=3$

$5+2=7$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Para cualquier problema de este tipo que se proponga, intenta la solución mediante la suma, Si no se resuelve con la suma, sin duda encontrarás la solución por sustracción.

Y de hecho, este es el único tipo que requiere suma y resta, y esto no se encuentra en absoluto en los tipos anteriores

Luca Pacioli (1447-1517)

Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità (Venecia, 1494), obra que tuvo una gran difusión en su época, recoge el saber de las aritméticas mercantiles y de las fuentes orientales usadas por los mercaderes italianos.

En esta obra encontramos enunciada y justificada la regla de los signos.

Retrato de Luca Pacioli, obra del pintor Jacopo de'Barbari (1440-1515) expuesta en el Museo di Capodimonte (Nápoles). Se ve Pacioli, caña en mano, demostrando uno de los teoremas de Euclides

La regla de los signos enunciada en la *Summa* de Pacioli

Piu.	vía.	piu.	ſempre.	fa.	píu.
Meno.	vía.	meno.	ſempre.	fa.	píu.
Píu.	vía.	meno:	ſempre.	fa.	meno.
Meno.	vía.	píu.	ſimiliter anche.	fa.	meno.

[Pacioli, 1494, f.112v]

La regla de los signos justificada en la *Summa* de Pacioli

Volvamos a nuestra prueba, esto es, que menos por menos no es menos, en contra de lo que tu dices. Póngase el dicho binomio 10 – 2 dispuesto como en el margen y sea 10, a y -2, b. Multiplica (a por a)10 por 10 que es 100 que se entiende positivo aunque no se ponga el signo. Pónlo aparte. Multiplica a por b, es decir, 10 (más) por menos 2 que será -20. Similarmente tendremos el otro lado de la cruz, que será -20, que hacen -40 y si los juntamos con los 100, tendremos 100-40, o sea, 60. Queda ahora multiplicar b por b, es decir, -2 por -2, que presuntamente resultará ser -4 o -2 si no es ni más ni menos. Y ni la una ni la otra son posibles en la práctica. Con el -4 resultaría que 8 por 8 sería 56 y con el -2 resultaría 58. Sabemos que la multiplicación de 8 por 8 resulta 64. Es imposible lo que habías dicho que menos por menos es menos. -2 por -2 es +4 que añadido al 60 da 64 que es el resultado de 8 por 8.

La regla de los signos en la *Summa* de Pacioli

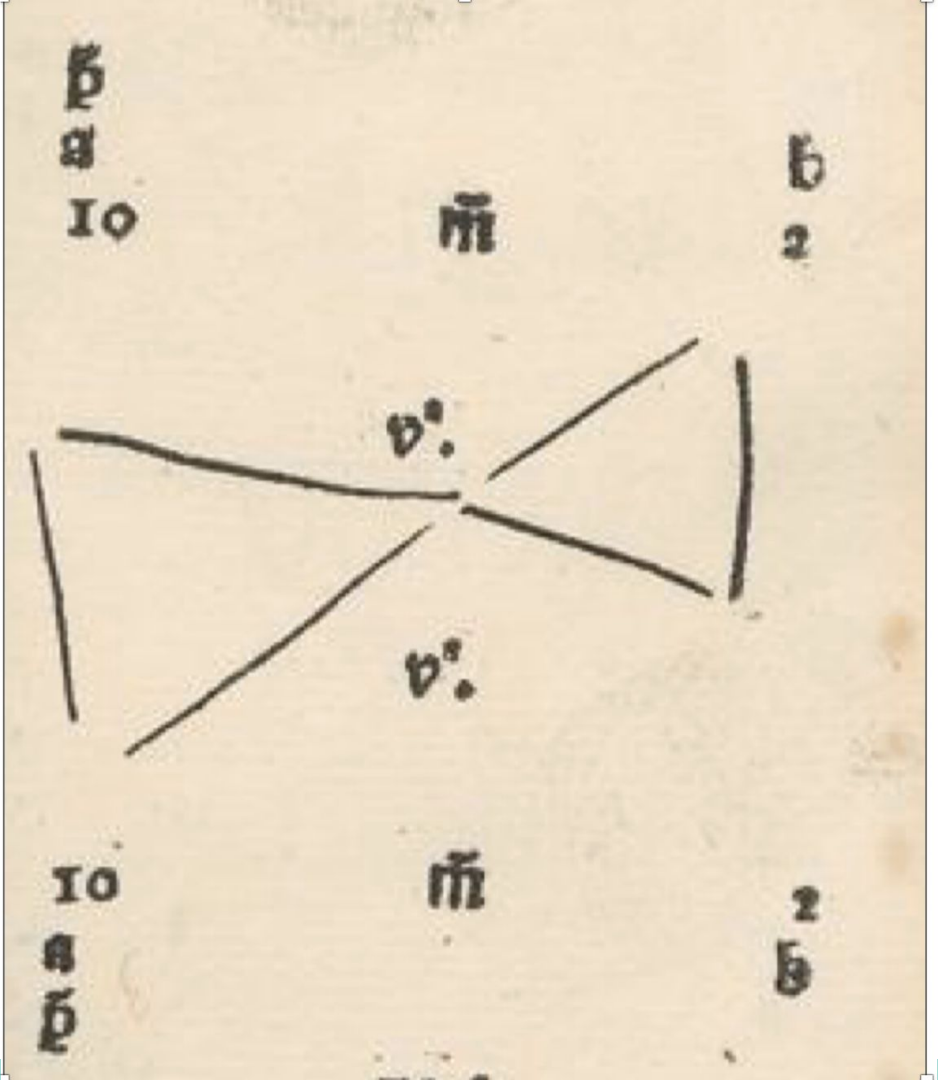
Or questo stã
te veniamo ala nostra probatione:cioe che.m̃.via.m̃.non po far.m̃.contra de te. E pongase el
ditto binomio:cioe.10.m̃.2.in termini e dispositione de figure:cõmo vedi q dacanto in mar
gine.E sia se te pare.10.a.e.m̃.2.b.E multiplica si cõmo le linee del via te mostra.a.in.a.cioe
10.in.10.fa.100.Quale se intende piu:benche non si ponga el segno:cõmo sopra nel primo
notando dissi.Qual metti da parte.E poi multiplica.a.in.b.cioe.10.piu che cosi se intende
via.m̃.2.fara.m̃.20.Per la terza regola data de laquale imediate se dira:cõmo de sotto inten
derai.E questo e p vno verso de la croci poi p laltro dirai similmẽte a.i.b.fara pure.m̃.20.le
q̃li multiplicationi asetta tutte in vna linea retta cõmo vedi. Lequali anze che piu oltra si va
da acoçça isiemi:e harai doi volte.m̃.20.che fanno.m̃.40.giõto cõ.100.fa.100.m̃.40.che vol
dire.60.Peroche.m̃.gionto a piu luno p laltro se abatte:cõmo de sotto se dira.E sia cõmo de
bito gionto a mobile pche debito desfa mobile q̃l desso quien che si paghi.Siche.m̃.40.si rie
pi e satisfasse.cõ.40.dimobile.Onde poi li.100.vẽgono restare.60.pagato che sia el debito:si
che fin qua le.3.nostre multiplicationi gionti fanno.60.Ora resta multiplicare.b.in.b.cioe.
m̃.2.via.m̃.2.p finire tutta la croceta:ouer casella.Qual pte fara.m̃.4.oueramente.m̃.2.cioe
tanto:cioe ne piu ne men. E sia per te qual voli che luna e laltra via ci da ipossibilita ne larte
pratica quale atendemo.Prima se.m̃.2.via.m̃.2 facia.m̃.4.p te seqta che.8.via.8.facia.56.qd
est absurdũ:z erroneũ dicere i arte.

[Pacioli, 1494, f.113r]

La regla de los signos en la *Summa* de Pacioli

Perche q̄sto debito de.m̄.4.gionto cō el mobile de.60.al
tra parte de la multiplicatione fara.56.pche.m̄.4.ꝯuen si riempia e satisfacia de.p̄. di mobile
Siche li.60.starebono in.56.che esser nō po:p quello che e ditto. Perche noi sapiamo che la
multiplicatione de.10.m̄.2.fa.64.che altro non vol dire che.8.via.8.vt supra diximus.Sich
habiam per questo che non fa.m̄.che e el primo intento.Similiter se arguesci che non fa tanto
cioe ne piu ne men:cioe.m̄.2.aponto.Peroche se.m̄.via.m̄.fa quello che e.Seque che.m̄.2.via
m̄.2.facia.m̄.2.che gionto al mobile de.60.altra parte de la multiplicatione fara.58.E cosi
haueremo de necessita a dire che.8.via.8.facesse.58.che luno e laltro seria falso:e secondo larte
impossibile:e sequitano del tuo ditto.Adonca el tuo ditto e falso:e impossibile:cioe che.m̄.vª.
m̄.faci.m̄.Ne anco tanto.E per consequente el nostro remane vero:cioe che piu via piu fa piu
Siche men.2.via men.2.fa piu.4.che gionto al mobile de.60.fanno aponto.64.che e el quesi
to.

[Pacioli, 1494, f.113ʳ]



(10 - 2)(10-2)

[Pacioli, 1494, f.113^{r}]

Girolamo Cardano (1501 - 1576)

Nace en Pavía y a los 19 años estudia medicina en esta Universidad. A los 26 años consigue el grado de doctor de medicina. El año 1529 se casa con Lucia Bandareni con la que tiene tres hijos. Del 1552 al 1559 viaja a Escocia donde su reputación como médico se consolidará. 1560 muere uno de sus hijos a Pavia. El 1571 vuelve a Roma y escribe su biografía.

Grabado del siglo XVIII por Richard Cooper el joven

Obras matemáticas de Cardano

Practica Arithmetica te mensurandi singularis (1539)*; Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis (conocido como Ars Magna)*(1545)*; Liber de ludo aleae (Un libro sobre juegos de azar)* (pub. 1663)*.*

Inicia un proceso de maduración de los métodos algebraicos, como herramientas para la resolución general de problemas. Empieza el algebrización de los problemas clásicos de geometría plana y la perspectiva de emplear el álgebra no para resolver problemas específicos sino universales.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Portada de *Artis Magnae* (1545)

Artis Magnae (1545)

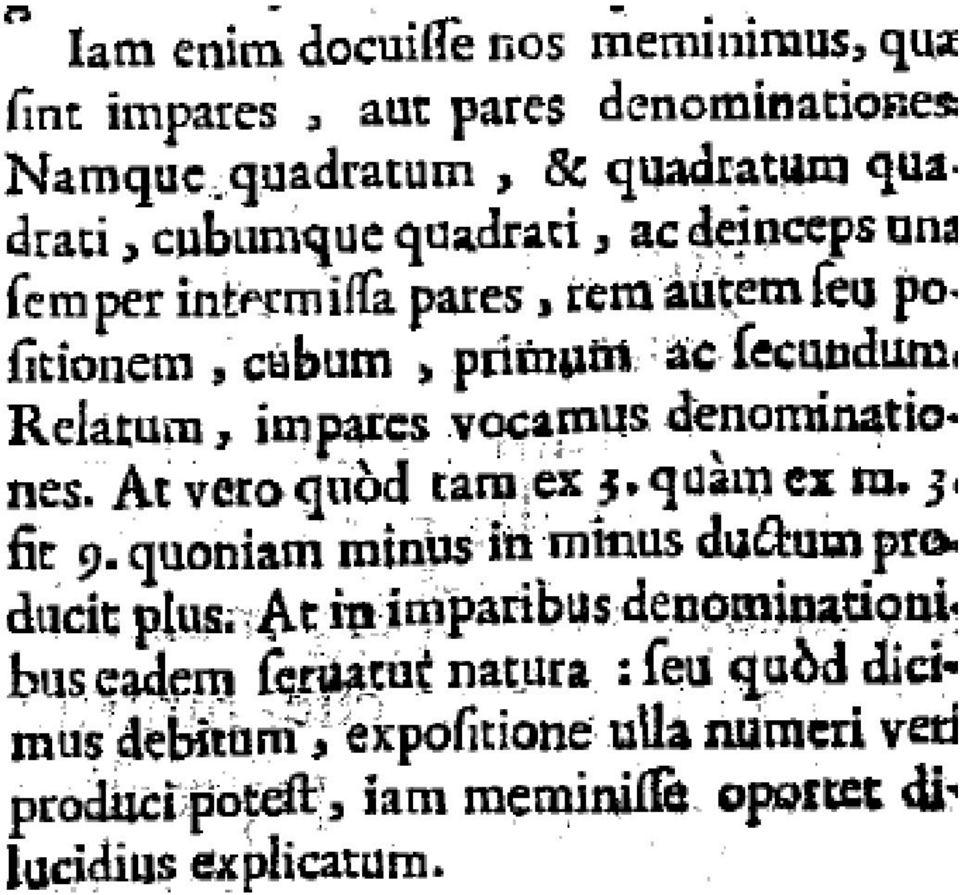
- I-IV: Cuestiones generales
- V: Ecuaciones de segundo grado
- VI: Preparación para las cúbicas
- VII: Transformación de las ecuaciones
- VIII: Solución de un tipo especial de ecuaciones
- IX y X: Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas
- XI al XXIII: Las soluciones de una cúbica
- XXIV-XXVIII: Nuevas ecuaciones y reglas imperfectas
- XXIX-XXXVIII: Sobre reglas de posición, áurea y problemas prácticos de aplicación
- XXXIX: Bicuadradas (Ludovico Ferrari)
- XL: Diversas proposiciones

Cardano cita los negativos en las potencias y raíces

«Ahora recordemos que hemos mostrado que hay potencias pares y nones. El cuadrado, el cuadrado del cuadrado, el cubo del cuadrado y así, siempre son potencias pares, mientras que la primera potencia, el cubo y la quinta y la séptima potencia son nones.

Verdaderamente tanto del 3, como del -3 se hace 9, puesto que menos por menos multiplicado produce más. Pero en el caso de potencias nones cada una va según su naturaleza. No produce más a menos que derive de un número verdadero (positivo), y un cubo que su valor es menos o el que nosotros denominamos debitum, no puede ser producido por ninguna expansión de un número verdadero (positivo). Hay que recordar esto muy claro».

Cardano cita los negativos


Iam enim docuiſſe nos meminimus, quæ
ſint impares , aut pares denominationes.
Namque quadratum , & quadratum qua-
drati , cubumque quadrati , ac deinceps una
ſemper intermiſſa pares , rem autem ſeu po-
ſitionem , cubum , primum ac ſecundum
Relatum , impares vocamus denominatio-
nes. At vero quòd tam ex 3. quàm ex m. 3.
fit 9. quoniam minus in minus ductum pro-
ducit plus. At in imparibus denominationi-
bus eadem ſeruatur natura : ſeu quòd dici-
mus debitum , expoſitione ulla numeri veri
produci poteſt , iam meminiſſe oportet di-
lucidius explicatum.

Cardano, 1545, 222

Acepta los números negativos como soluciones

En el capítulo 37 de *Artis Magnae* titulado *De regula falsum ponendis* resuelve un problema poniendo un signo «—» al término de primer grado y llega a una solución positiva y una negativa.

Este problema se soluciona con la misma regla : Divide 6 entre dos partes, el producto de las cuales es -40. Cuadra 3, la mitad de 6, hará 9. Añade este a 40, dará 49, la raíz cuadrada es 7 y añádelo a 3, la mitad de 6, y disminuye y te dará +10 y —4 que multiplicando producirán -40 y juntando, hacen 6. Igualmente — 10 y +4 dará —40 cuando multiplicamos y —6 cuando añadimos. De aquí que este problema es uno de un puro negativo y pertenece a la primera regla».

Acepta los números negativos como soluciones

1. Cuadrados y raíces = números ($ax^2 + bx = c$)
2. Cuadrados y números = raíces ($ax^2 + c = bx$)
3. Raíces y números = cuadrados ($bx + c = ax^2$)

$x^2 + 6x = 40$ (primera regla)

$x = -10$ $100 - 60 = 40$

$x = 4$ $16 + 24 = 40$

$x^2 - 6x = 40$ (tercera regla: $6x+40 = x^2$)

$x = 10$ $100 - 60 = 40$

$x = -4$ $16 + 24 = 40$

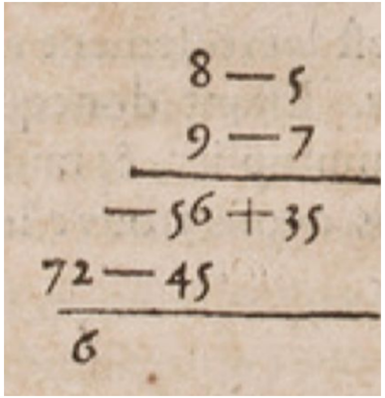
Simon Stevin (1548-1620). La regla de los signos

Stevin enuncia a modo de teorema lo que conocemos como la regla de los signos para la multiplicación.

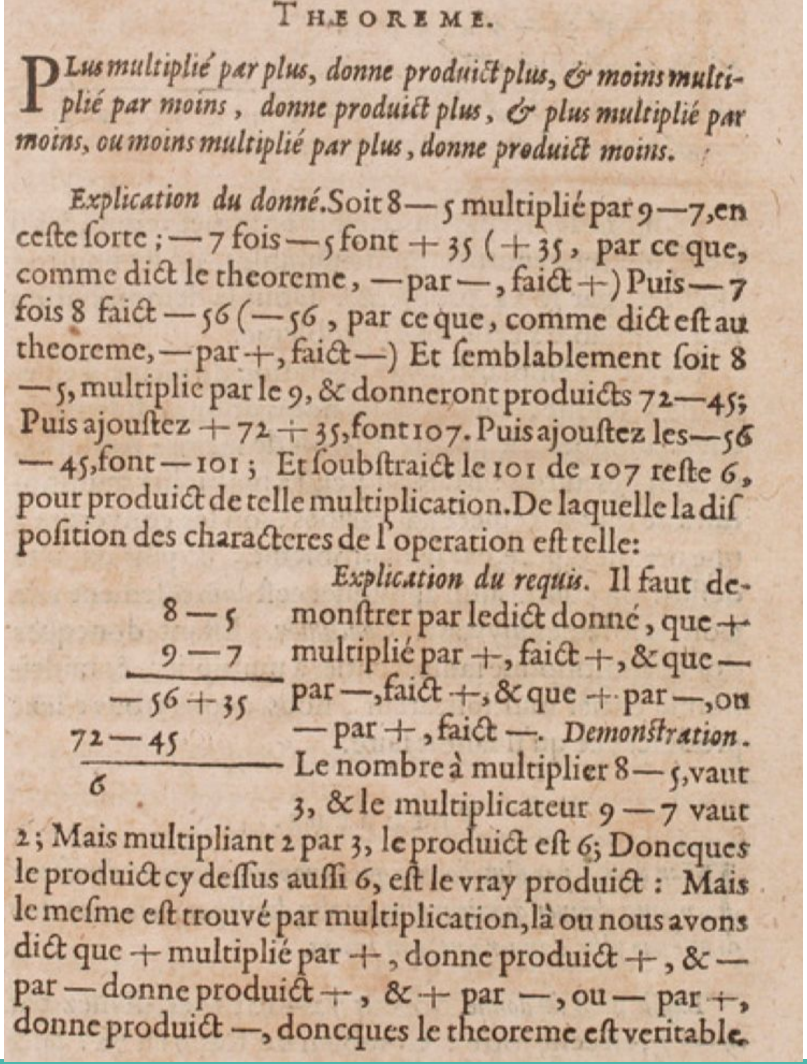
Efectúa el producto (8-5) (9-7) aplicando la propiedad distributiva y el teorema que acaba de enunciar y a continuación lo prueba diciendo:

«El número a multiplicar vale 3 y el multiplicador 2, de manera que el producto es 6.

El mismo resultado hemos obtenido en el producto tal como se muestra en la imagen, de manera que el teorema enunciado es correcto».



Simon Stevin.
La regla de los signos



THEOREME.

PLus multiplié par plus, donne produict plus, & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins.

Explication du donné. Soit 8—5 multiplié par 9—7, en ceſte ſorte; —7 fois —5 font +35 (+35, par ce que, comme dict le theoreme, —par—, faict +) Puis —7 fois 8 faict —56 (—56, par ce que, comme dict eſt au theoreme, —par +, faict —) Et ſemblablement ſoit 8—5, multiplie par le 9, & donneront produicts 72—45; Puis ajouſtez +72 +35, font 107. Puis ajouſtez les —56 —45, font —101; Et ſoubſtraict le 101 de 107 reſte 6, pour produict de telle multiplication. De laquelle la diſpoſition des characteres de l'operation eſt telle:

8—5
9—7
—56+35
72—45
6

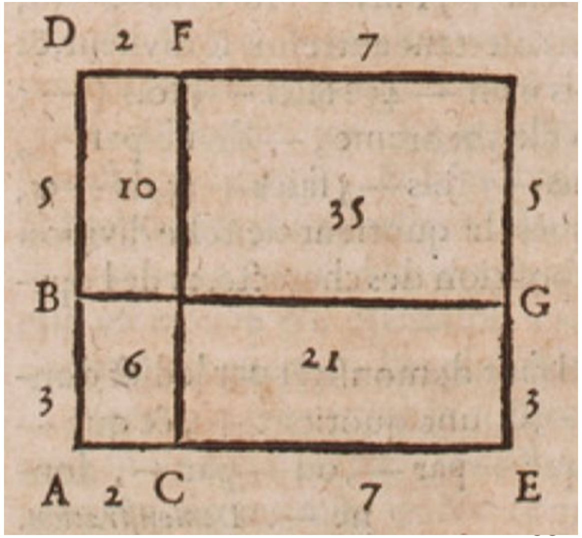
Explication du requis. Il faut demonſtrer par ledict donné, que + multiplié par +, faict +, & que — par —, faict +, & que + par —, ou — par +, faict —. *Demonſtration.* Le nombre à multiplier 8—5, vaut 3, & le multiplicateur 9—7 vaut 2; Mais multipliant 2 par 3, le produict eſt 6; Doncques le produict cy deſſus auſſi 6, eſt le vray produict: Mais le meſme eſt trouvé par multiplication, là où nous avons dict que + multiplié par +, donne produict +, & — par — donne produict +, & + par —, ou — par +, donne produict —, doncques le theoreme eſt veritable.

[Stevin-Girard, 1634, 39]

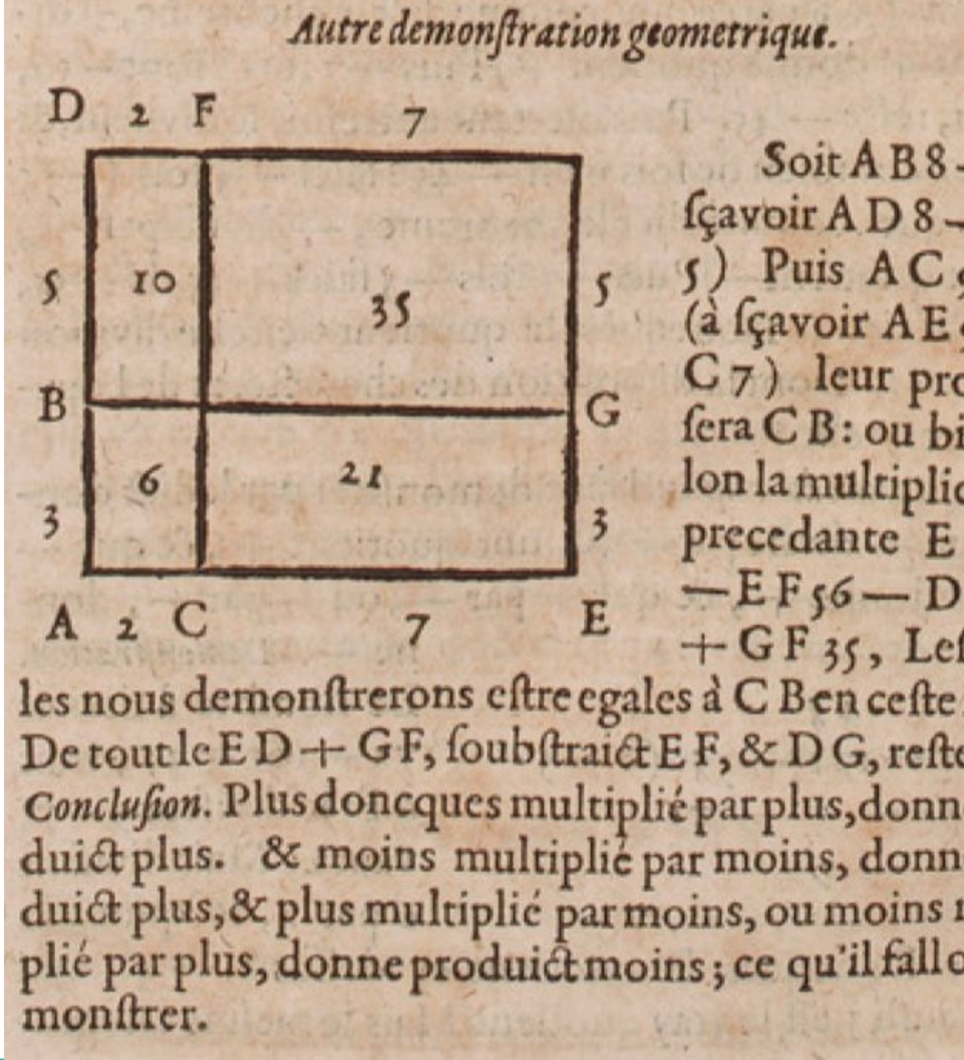
La regla de los signos. Demostración geométrica

Se centra en el rectángulo CB de la figura: AD es 8 y BD es 5, cuya diferencia es el multiplicando. AE es 9 y CE es 7, cuya diferencia es el multiplicador. Su producto será CB, o bien según la multiplicación precedente ED (72) - EF (56)- DG(45) + GF(35) que nos demostrarán ser iguales a CB de esta manera.

De ED+GF sustraemos EF y DG y queda CB. La conclusión es que más multiplicado por más da más como producto. Menos multiplicado por menos, da más como producto y más multiplicado por menos o menos multiplicado por más, da menos como producto, que es lo que había que demostrar.



Simon Stevin.
la regla de los signos



Autre demonſtration geometrique.

Soit A B 8 -
ſçavoir A D 8 -
5) Puis A C
(à ſçavoir A E
C 7) leur pro
ſera C B: ou bi
lon la multiplic
precedante E
— E F 56 — D
+ G F 35, Les
les nous demonſtrerons eſtre egales à C B en ceſte
De tout le E D + G F, ſoubſtraict E F, & D G, reſte
Concluſion. Plus doncques multiplié par plus, donn
duict plus. & moins multiplié par moins, donn
duict plus, & plus multiplié par moins, ou moins
plié par plus, donne produict moins; ce qu'il fall
monſtrer.

[Stevin-Girard, 1634, 39]

Marco Aurel, los ocho tipos de ecuaciones

Ocho reglas para las ocho ygualaciones.

Agora te quiero moſtrar 8 reglas, para las 8 ygualacio
nes: en las quales eſtan fundadas las reſpueſtas de nueſtra re-
gla, de la coſa, o arte mayor: dado que algunos ponen 6, co-
mo fray Lucas del Burgo: y otros 10, como Albertucio de
Saxonia. A mi empero me ha pareſcido tomar el medio arith-
metico, entre 10, y 6, que es 8: pues por ellas entẽderas las
6 de fray Lucas: y por las meſmas alcançaras las 10 de Alber-
tucio. Las 4 ſon ſimples, de 2 quantidades: y las otras 4
compueſtas, de 3 quantidades, como aqui las veras de vna
en vna, y primero las ſimples.

[Aurel, 1552, 78]

Solo soluciones positivas

Se analizan dos casos (5a y 6a igualaciones) para poner de manifiesto que el autor sólo admite soluciones positivas. Con el procedimiento de la resolución de la 5a solo obtiene una solución. En términos actuales, este tipo de ecuaciones siempre tienen una solución positiva y una negativa, por eso Aurel solo encuentra una solución.

En el caso de la 6a igualación, él sabe que debe obtener dos soluciones. En el procedimiento que describe ha invertido los signos de las operaciones finales, por eso al ejecutarlo vuelve a invertir el orden de las operaciones para obtener las dos soluciones.

Igualación compuesta con una sola solución

$$ax^2 + bx = c;$$

Regla, y regimiento para la quinta yguacion.

Quando ſe ygualaren tres quantidades, o differencias de nombres ygualmente diſtantes, y que no falte ninguna entre medias, deſta manera que los dos mayores ſe ygualen a la menor. Partiras la menor, y mediana cada vna por ſi por la mayor, y multiplicaras la metad del quociente, dela particion del mediano en ſi meſmo: y al dicho producto juntaras el quociente dela particion del menor: √ de toda eſta ſumma: menos la $\frac{1}{2}$ del quociente del mediano, ſera la valor de vna ꝛ.

Exemplo. 2 ȝ + 12 ꝛ ſon ygual a 32 ɸ, parte ɸ, y ꝛ por ȝ, y verna el quociente del menor 16, y del mediano 6, cuyo metad es 3, multiplicado en ſi, ſon 9: alos quales junto 16, que es el quociente del menor, y vernan 25: √ 25 − 3, es la valor de vna ꝛ: √ 25, es 5, quitãdo 3, quedan 2. Tanto vale vna ꝛ.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a};$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

$$2x^2 + 12x = 32;$$

$$x^2 + 6x = 16;$$

$$\sqrt{9 + 16} - 3 = 2$$

[Aurel, 1552, 78v]

Igualación con dos soluciones

$$ax^2 + c = bx$$

Regla, y regimiento dela ſexta ygualacion.

Quando ſe ygualaren tres quantidades, o differencias de nombres ygualmente diſtantes, y que no falte ninguna entre medias: deſta manera q̃ la mayor, y menor ſe ygualen a la mediana, tambien partiras el menor, y mediano cada vna por ſi, por la mayor. Y multiplica la metad del quociente del mediano en ſi meſma, y del dicho producto, quitaras el quociente del menor. √ dela reſta, y +, o −, la metad del quociente del mediano, ſera la valor de vna ꝶ.

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$$

[Aurel, 1552, 78^v - 79^r]

$2x^2 + 32 = 20x$

❧ Exemplo. 2 ȝ + 32 ₰, ſon ygual a 20 ꝶ. Parte como dicho tengo, y verna el quociente del menor ſer 16, y el del mediano 10, cuya metad es 5, multiplicado en ſi, vernã 25, delos quales quita 16, que es el quociente del menor, y quedaran 9: √9 − 5. Digo 5 − √9, que es 2, ſera la valor de vna ꝶ.

❧ Y tambien pudieras hauer dicho √9 + 5, q̃ es 8, tanto diras que vale 1 ꝶ. Quando la ꝶ vale 2 ₰, 2 ȝ valdran 8, y mas 32, que ſon 40, otro tanto valen 20 ꝶ, que ſon yguales. Y ſi la ꝶ vale 8 ₰, 2 ȝ valdran 128, y mas 32, ſon 160: otro tanto valen 20 ꝶ. Nota, quando te verna como eneſta ſexta ygualacion viene, y agora vino a dezir √9 − 5. Bien vees que no puede dezir 3 − 5, ſeria impoſsible de 3, ſacar 5. Por lo qual lo has ſiempre de boluer, y poner la quantidad mayor primero. Aſsi 5 − √9, como enel partir de binominos has viſto.

Ejemplo de igualación con dos soluciones, en el lenguaje actual

$2x^2 + 32 = 20x$

$x^2 + 16 = 10x$

$$\sqrt{5^2 - 16} \pm 5 = \sqrt{9} \pm 5$$

$$ax^2 + c = bx$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$$

De estas dos soluciones, una es positiva y la otra negativa: 3-5. Aurel invierte los términos para obtener: 5-3. También obtiene 3+5.

En la nota explica que cuando en esta sexta igualación ocurra que es una operación imposible se debe invertir el orden (poner la cantidad mayor primero).

¿Por qué una cuarta igualación compuesta?

Regla, y regimiento para la octaua ygualacion.

Quando ſe ygualaren tres quantidades, o differencias de nombres, ygualmente diſtantes, y que entre cada dos ordinarios faltare vna, dos, o tres, &c. quantidades, o grados, procederas conforme ala 5ª, 6ª, y 7ª, regla de ygualacion precedentes. De tal manera q̄ ſi las dos mayores ſe ygualan ala menor ſiguiras ala 5ª: y ſi la mayor y menor ſe ygualaren ala mediana, ala 6ª: y ſi las dos menores ala mayor, ſiguiras ala 7ª regla.

Interpretación de la octava igualación

En la octava igualación generaliza las igualaciones compuestas descritas anteriormente con casos en que los grados cumplen unas determinadas condiciones:

$$ax^{n+2k} + bx^{n+k} = cx^{n};$$

$$ax^{n+2k} + cx^{n} = bx^{n+k};$$

$$bx^{n+k} + cx^{n} = ax^{n+2k}, \qquad k \in N.$$

Pérez de Moya. Segunda igualación de las compuestas

2. ¶ La ſegunda es quando vienen tres characte-
res igualmente diſtãtes, de ſuerte que entreme
dias no falte algun character, & q̃ el mayor y
menor ſe igualan al median.o Aſsi como ſi ce.&
n.ſe igualaſſen à co. O como ſi cv.y co.ſe igualaſ
ſen à ce.y aſsi de otros qualeſquiera characteres.

En tal caſo partiras loq̃ viniere con los characteres menores, por lo que viniere con el mayor, & deſpues ſacaras la mitad del quociente del mediano, & multiplicar la has por ſi, & deſte producto reſtaras el quociente del menor character, & la r. deſta reſta mas ò menos la otra mitad del mediano, es el valor de la coſa, & reſpueſta de la demanda. Lee el articulo ſexto del capitulo decimotercio.

¶ Nota, porque dize que la r. de la resta p. ò m. la otra mitad del mediano sera el valor de la cosa y respuesta de la demanda, se sigue, que las demandas desta igualacion tendrã dos respuestas por la mayor parte, y porque sepas quando sera bien juntar à la r. la mitad del mediano, ò quitar la: tendras este auiso. Quando la q. q̃ estuuiere con el character mediano fuere mayor que la q. que estuuiere con el menor, entonces juntaras la r. con la mitad del mediano. Y si fuere al contrario: quiero dezir, si la q. del menor fuere mayor que la del mediano, quitaras la r. de la mitad del mediano.

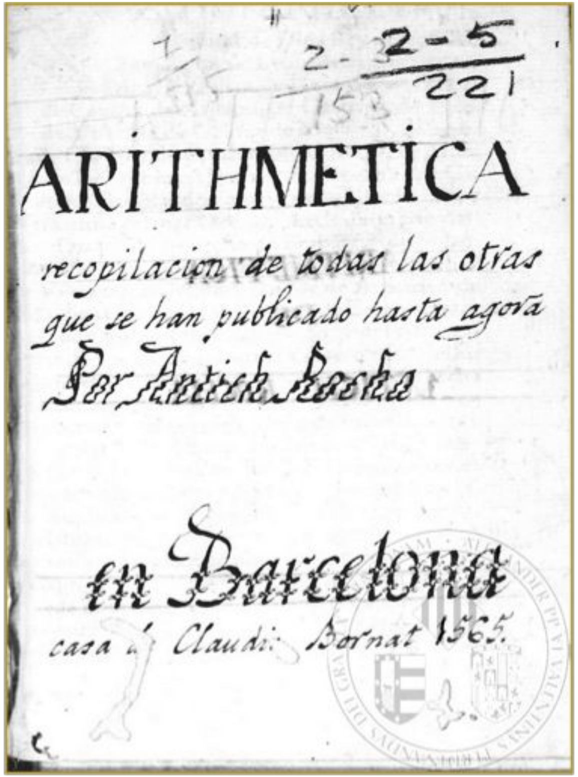
Articulo ſexto deſte. XIII. capit.

Trata demandas de la ſegunda ygualacion compueſta de tres quantidades.

¶ Haz de.10.tales dos partes, que multiplicãdo la vna por la otra monte.21.Pon por caſo que la vna parte ſea.1.co.la otra ſera todos los.10. n. m. 1.co.multiplicando.1.co por.10.n. m.1.co. como ſe moſtro en el tercero articulo del.8.capi. montara.10.co.m.1.ce.lo qual ſera igual à.21. n. q̃ quiſieras.aora paſſa el 1. ce.que enla vna parte viene m.à la otra con los.21.n.& quedara.10.co. iguales à.21.n.p.1.ce.Sigue lo que la regla mãda que es partir los.21.y los.10, que ſon las quantidades (que vienen con los menores characteres) por el.1.que viene con el mayor, & vendran lo mismo à los quocientes. Saca la mitad de los.10.que es quociente del menor & sera.5 . quadra la como se mostro en el sexto articulo del quarto capitulo, & montara.25.destos. 25. resta los. 21. que es el quociente del menor & restaran.4 . destos 4.saca la r.que es.2.estos. 2. y mas la otra mitad del quociente del mediano que es. 5 . seran. 7. (pues el menos aqui no tiene lugar) es el valor de la cosa y respuesta de la demanda. Pues porque por la primera parte pusiste. 1. co . & la cosa sale. 7 . luego la vna parte sera. 7 . & porque lo que se parte son.10.siguese que la otra sera. 3 . & assi diras que las dos partes del diez son siete & tres, los quales si se multiplica la vna parte por la otra montara veynte y vno como la demanda pide.

Antic Roca (Girona, ca. 1530-1580)

Arithmetica, recopilación de todas las obras que se han publicado hasta ahora por Antich Rocha, impresa en Barcelona en 1564.



La ſegunda ygualacion compueſta es, quãdo ſe ygualaren tres cãtidades, characteres, o differencias de numeros ygualmente diſtantes, y que no falte ninguna entremedias, deſta manera, que la mayor y menor ſe ygualẽ ala mediana (como ſi ce. y nu. ſe ygualaſſen a co.) partiras tambiẽ el menor y mediano cada vno por ſi por la mayor (como he ziſte en la primera) y multiplica la metad del quotiente del mediano en ſi miſmo, y del producto deſta multiplicacion ſacaras el quotiente del menor, y la ra.q. dela reſta: y mas o menos la metad đl quotiente del mediano ſera la valor de vna co. Y eſto has de aduertir, que la mayor parte, o todas las demandas que por eſta ygualacion ſe acaban, tienen dos reſpueſtas. Y ſi querras ſaber quando ſera mejor quitar o añadir ala ra.q. dela reſta, la metad del quotiente del mediano, ternas eſte auiſo. Quando la cantidad que estuuiere cõ el character mediano, fuere mayor que la cantidad del menor, juntaras la ra.q.con la metad del quotiente del mediano, y si fuere menor que la cantidad del menor, quitaras la ra.q.dela metad del quotiente del mediano, y en lo restante tu discrecion te encaminara.

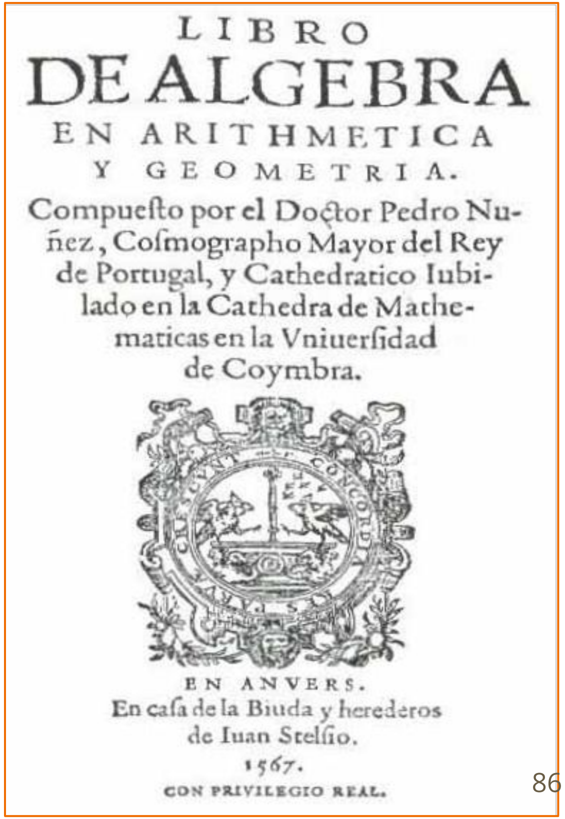
Y esto tambien has de notar, que quãdo el quotiente del menor fuere mayor cantidad que el quadrado dela metad del quotiẽte del mediano, de manera que no puedas quitar (como lo manda la regla) el quotiente del menor del quadrado dela metad del quotiẽte del mediano, sumar lo has, y su ra. q. desta suma, y mas la metad del quotiente mediano, sera la valor dela cosa.

Si alguno te pidiesse, q̃ hiziesses de.20.tales dos partes, que multiplicando la vna con la otra vẽgan 84.pongo que la vna parte sea.1.co.la otra sera. 20. nu.menos.1.co.multiplico la vna cõ la otra, vienen 20.co.me.1.ce.ygual a.84.nu.yguala, dando ce. a cada vna parte, y saldran.1.ce.mas. 84. nu. ygual a. 20. co.sigue la regla desta.6.ygualacion, y verna. 1. co. a valer.6.nu.y diras que tanto es la parte menor y la mayor.14.porque las dos partes juntas hazen.20.y multiplicando vna con otra hazen.84.

[Antic Roca, 1564, 266-267]

Pedro Nuñez (Alcácer do Sal, 1502 - Coimbra,1578)

Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria (Amberes, 1567).



LIBRO
DE ALGEBRA
EN ARITHMETICA
Y GEOMETRIA.

Compueſto por el Doctor Pedro Nu-
ñez, Coſmographo Mayor del Rey
de Portugal, y Cathedratico Iubi-
lado en la Cathedra de Mathe-
maticas en la Vniuerſidad
de Coymbra.

EN ANVERS.
En caſa de la Biuda y herederos
de Iuan Stelſio.
1567.
CON PRIVILEGIO REAL.

Los seis tipos de ecuaciones

Cõjugaciones ſimples:	1. Cenſos yguales a Coſas.
	2. Cenſos yguales a Numero.
	3. Coſas yguales a Numero.
Cõjugaciones compueſtas:	4. Cenſo y coſas yguales a numero.
	5. Coſas y numero yguales a cenſo.
	6. Cenſo y numero yguales a coſas.

Sexta Regla, q̃ es la tercera de las compueſtas: Quando vn cenſo y el numero fueren yguales a las coſas, multiplicaremos en ſi la mitad del numero de las coſas criando quadrado, del qual quitaremos el numero propueſto, y de lo que quedare tomaremos la Raiz. La qual juntando con la mitad del numero de las coſas, o quitandola ſi quiſieremos, nos dara el valor de la coſa.

Exemplo: Pongamos que vn cenſo con el numero.24. ſon yguales a .10. coſas, y queremos ſaber quãto ſea el valor de la coſa. La mitad del numero de las coſas es.5.que multiplicados en ſi, hazen .25 , de los quales quitando .24. queda vno, cuya raiz que es.1. juntaremos con.5, y haremos.6. que ſera el valor de la coſa. E podremos tambien ſi nos pluguiere quitar.1. de.5.y quedaran .4. q̃ otro ſi puede ſer valor de la coſa: mas en reſpeto de otro cenſo, y con entrambos los valores de la coſa, quadra el exemplo.

Forma estandar	Ejemplo	Expressión actual de la fórmula
$ax^2 = bx$	$4x^2 = 20x$ ($x=5$)	$x = \frac{b}{a}$
$ax^2 = c$	$7x^2 = 63$ ($x=3$)	$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$
$bx = c$	$10x = 25$ ($x = 2\frac{1}{2}$)	$x = \frac{c}{b}$
$x^2+bx = c$	$x^2 + 10x = 56$ ($x=4$)	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
$bx+c = x^2$	$6x + 40 = x^2$ ($x=10$)	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$
$x^2 + c = bx$	$x^2 + 24 = 10x$ ($x=6$ i $x=4$)	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 - c} \pm \frac{b}{2}$

Lugar	fechas	Autores
China	c. 250	Liu Hui (comentarista del texto clásico)
Grecia antigua- Alejandría	c. 250	Diofanto
India	c. 625	Brahmagupta
El mundo árabe	c. 780 – 850	Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

Lugar	**fechas**	**Autores**
Occidente	1447-1517	Luca Pacioli
	1501-1576	Girolamo Cardano
	1548-1620	Simon Stevin

Lugar	fechas	Autores
La Península	f. 1552	Marco Aurel
	1502-1578	Pedro Núñez
	1512-1596	Juan Pérez de Moya
	década de 1530 - década de 1580	Antic Roca

Una actividad a partir de algunos de los textos presentados

A partir de los textos presentados, elegir uno o diversos autores para construir una actividad de aprendizaje:

- Para alumnos de …. (curso o edad)
- ¿Qué queremos que aprendan? (saberes o competencias involucrados)

Posible guión para la lectura del texto o textos elegidos:

- ¿Quien es el autor?
- ¿Qué problema matemático se plantea?
- ¿Qué uso hace de los números negativos?
- ¿Cómo se resuelve en la actualidad el problema planteado?

Bibliografia

Aurel, Marco (1552). *Libro primero de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantívol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte Mayor o Regla de la cosa: sin la qual no se podrà entender el décimo de Euclides, ni otros muchos primores, asi en Arithmetica como en Geometria: compuesto, ordenado, y hecho Imprimir por Marco Aurel*. En casa de Joan de Mey Flandro. Valencia.

Chemla, Karine; Shuchun, Guo (eds.) (2005) *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* [edició crítica bilingüe], París: Dunod.

Datta, Bibhutibhusan y Avadhesh. N. Singh (1961) *History of Hindu Mathematics*, Bombay: Asia Publishing House.

Guevara-Casanova, Iolanda (2009) Els nombres negatius i el zero: Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567), Arc aplicació de recursos al currículum, <http://apliense.xtec.cat/arc/node/421>.

Guevara-Casanova, Iolanda y Carles Puig-Pla (2016) *El álgebra de las estrellas.Brahmagupta,* Col. Genios de las matemáticas, Barcelona: RBA.

Heath, T.L. (1910) *Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek Algebra,* Cambridge: University Press.

Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee (2004) *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics,* Washington: The Mathematical Association of America.

Massa-Esteve, Ma. Rosa, (2010). “The treatment of equations in the Iberian Peninsula after Marco Aurel (1552): The Great Art of Antic Roca”, a H. Hunger, F. Seebacher i G. Holzer, (eds). *Styles of thinking in Science and Technology*, 103-111. 3rd ICESHS, Vienna: Austrian Academy of Sciences.

Moreno-Castillo, Ricardo (2011) *Aryabhata, Brahmagupta y Baskara. Tres matemáticos de la india,* La matemática y sus personajes, 39, Tres Cantos (Madrid): Ed. Nivola.

Nuñez Salaciense, Pedro, (1567) *Libro de álgebra en arithmetica y geometría.* En casa de los Herederos d’Arnoldo Birkman. Anvers.

Pacioli, Luca (1494), Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni et Proportionalità, Venezia, Paganino de Paganini.

Pérez de Moya, Juan, (1562), Arithmetica práctica y speculativa [del Bachiller Juan Pérez de Moya, agora nuevamente corregida y añadidas por el mismo autor muchas cosas con otros dos libros y una tabla muy copiosa de las cosas más notables de todo lo que en este libro contiene]. Mathías Gast. Salamanca.

Pla i Carrera, Josep (2009) Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china, Col. La matemática y sus personajes, 39, Tres Cantos (Madrid): Ed. Nivola.

Plofker, Kim (2009) Mathematics in India, Princeton: Princeton University Press.

Rabouin, David (2024). "Negatives as fictions in 16th and 17th century mathematics". Historia Mathematica, vol 69, p.41-61.

Roca, Antic (1564). Arithmetica recopilación de todas las otras que se han publicado hasta agora. Claudio Bornat. Barcelona.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2012). "Algebraic symbolism in the first algebraic works in the Iberian Peninsula", Philosophica, 87, 117-152. Ghent University.

Romero Vallhonesta, Fàtima; Massa Esteve, Ma. Rosa (2015). “Història de les Matemàtiques per a l’Ensenyament de les Matemàtiques. Analizant les fonts”. *Actes de la XIII Jornada sobre la Història de la Ciència i l’Ensenyament.* Barcelona, SCHCT-IEC,.

Romero Vallhonesta, Fàtima; Massa-Esteve, Ma. Rosa (2018). “The main sources for the *Arte Mayor* in sixteenth century Spain”. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics.*

Romero Vallhonesta, Fàtima; Massa-Esteve, Ma. Rosa; Guevara-Casanova, Iolanda; Puig-Pla, Carles (2021), “Textos històrics per a l’aprenentatge de les matemàtiques. El cas dels nombres negatius”, Actes de la XVVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l’Ensenyament “Antoni Quintana i Marí”, p.17-28.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2022). «La introducción del álgebra en la Península Ibérica». La Gaceta de la RSME, vol. 25, n. 3, p. 577-594.

Sharma, S.R.S (1966) Brahma-Sphuta-Siddhanta, with Vasana, Vijriana and Hindi Commentaries, New-Delhi: Indian Institute of Astronomical and Sanskrit Research.

Stevin, S (Girard) (1634). *Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin.* Leyde. Chez Bonaventure & Abraham Elsevier.

FRV-IGC, Taller números negativos, A Coruña 2025

Fàtima Romero Vallhonesta
<fatima.romerovallhonesta@gmail.com>

Iolanda Guevara Casanova
<iguevara@xtec.cat>