

La sustitución de las ciencias naturales por las sociales como inspiración del estudio de los sistemas lineales

Miguel A. Goberna¹

1ª Escuela de verano CEMat en Historia de las Matemáticas
A Coruña, 10/10/2025

¹Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

- **Sistemas de ecuaciones lineales**

La naturaleza como minimizador local analógico.

El método de mínimos cuadrados.

El modelo interindustrial de Leontief.

- **Sistemas de ecuaciones lineales**

La naturaleza como minimizador local analógico.

El método de mínimos cuadrados.

El modelo interindustrial de Leontief.

- **Sistemas de inecuaciones lineales**

Diagramas de Voronoi.

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945.

- **Sistemas de ecuaciones lineales**

La naturaleza como minimizador local analógico.

El método de mínimos cuadrados.

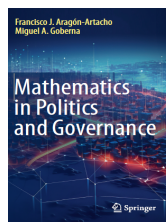
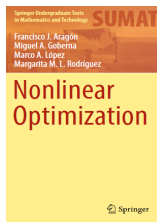
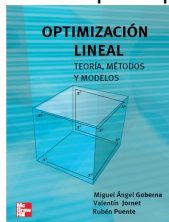
El modelo interindustrial de Leontief.

- **Sistemas de inecuaciones lineales**

Diagramas de Voronoi.

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945.

- Fuentes principales:



La naturaleza como minimizador local analógico

La naturaleza como minimizador local analógico

La refutación por Fermat de la ley de refracción de la luz de Snell-Descartes



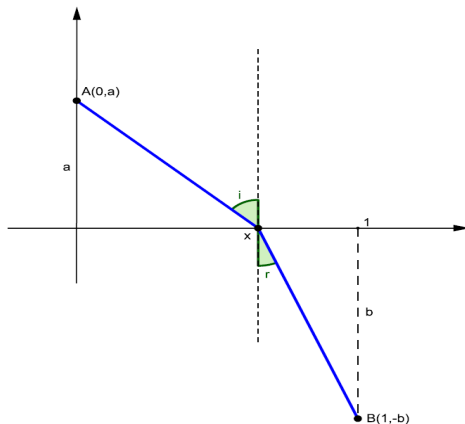
Chez Fermat, en Beaumont
de Lomagne



con J.-B. Hiriart-Urruty

La naturaleza como minimizador local analógico

Según Fermat, la luz se desplaza de un punto a otro siguiendo el camino que requiere menor tiempo, que estará contenido en el plano que contiene a ambos puntos.



La naturaleza como minimizador local analógico

- El problema a resolver es

$$P : \text{Min } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-1)^2 + b^2}}{v_2},$$

donde v_1 es la velocidad de la luz en el primer medio y v_2 en el segundo.

La naturaleza como minimizador local analógico

- El problema a resolver es

$$P : \text{Min } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-1)^2 + b^2}}{v_2},$$

donde v_1 es la velocidad de la luz en el primer medio y v_2 en el segundo.

- Los puntos críticos de f son las soluciones de la ecuación

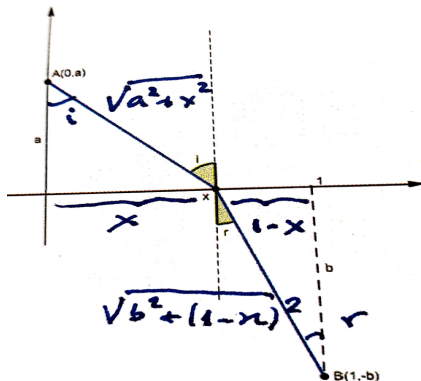
$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-1}{v_2 \sqrt{b^2 + (1-x)^2}} = 0$$

es decir,

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (1-x)^2}}$$

La naturaleza como minimizador local analógico

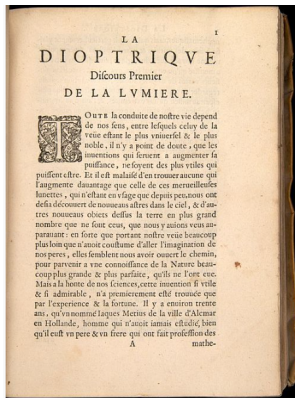
Sustituyendo arriba $\sin i = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ y $\sin r = \frac{1-x}{\sqrt{b^2+(1-x)^2}}$



obtuvo Fermat su ley de refracción: $\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}$

La naturaleza como minimizador local analógico

Corrigió así Fermat la ley empírica de Snell en la que había basado Descartes su *Dioptrique* (Descartes, 1637): $\frac{i}{v_1} = \frac{r}{v_2}$



Wikipedia atribuye a Snell y Descartes la versión de Fermat. Véase Goberna et al. (2004, pp. 103-106) y Aragón et al. (2019, pp. 42-43).

El principio de mínima acción

El comportamiento de la luz ilustra el principio metafísico de mínima acción de Maupertius, que establece que en todos los fenómenos naturales una cantidad llamada "acción" tiende a minimizarse. En otras palabras, la naturaleza siempre actúa de la forma más económica. Este principio, enunciado en 1746, aunque criticado por filósofos como Voltaire (en *Le candide*) por su vaguedad y teísmo implícito, fue finalmente aceptado por la comunidad científica a medida que, paso a paso, se fueron identificando las mencionadas «acciones» para una variedad de fenómenos naturales: energía potencial, entropía, energía libre, etc. Aragón et al. (2019, p. 3)

La naturaleza como minimizador local analógico

- Hay una omisión importante en el enunciado de Maupertius: en todos los fenómenos naturales **una cantidad llamada "acción" tiende a minimizarse localmente.**

La naturaleza como minimizador local analógico

- Hay una omisión importante en el enunciado de Maupertius: en todos los fenómenos naturales **una cantidad llamada "acción" tiende a minimizarse localmente.**
- Eso no importaba en el caso de la refracción de la luz porque, **al ser f convexa, los mínimos locales son globales.** Pero sí que importa cuando insertamos una cuenta de collar en un alambre de forma caprichosa.

La naturaleza como minimizador local analógico

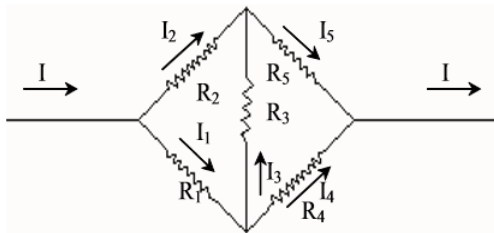
- Hay una omisión importante en el enunciado de Maupertius: en todos los fenómenos naturales **una cantidad llamada "acción" tiende a minimizarse localmente.**
- Eso no importaba en el caso de la refracción de la luz porque, **al ser f convexa, los mínimos locales son globales.** Pero sí que importa cuando insertamos una cuenta de collar en un alambre de forma caprichosa.
- **Surgen sistemas de ecuaciones lineales al minimizar funciones cuadráticas sin restricciones o sujetas a restricciones lineales, como ocurre en los circuitos eléctricos.**

La naturaleza como minimizador local analógico

Circuitos eléctricos

El circuito eléctrico de abajo es atravesado por una corriente continua de I amperios. Denotamos por I_i la intensidad de la corriente que circula por la resistencia R_i (expresada en ohmios), a la que le hemos atribuido un sentido arbitrario; la potencia disipada en ese elemento del circuito es de $R_i I_i^2$ watios por el llamado [efecto Joule](#).

Principio de mínima acción aquí: las corrientes minimizan localmente la potencia total perdida.



La naturaleza como minimizador local analógico

- Hay que resolver

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{Min} \quad f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = \sum_{i=1}^5 R_i l_i^2 \\ & \text{s.a} \quad l_1 + l_2 = l, \\ & \quad \quad l_1 - l_3 - l_4 = 0, \\ & \quad \quad l_2 + l_3 - l_5 = 0. \end{aligned}$$

La naturaleza como minimizador local analógico

- Hay que resolver

$$\begin{aligned} P : \quad \text{Min} \quad & f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = \sum_{i=1}^5 R_i l_i^2 \\ \text{s.a} \quad & l_1 + l_2 = l, \\ & l_1 - l_3 - l_4 = 0, \\ & l_2 + l_3 - l_5 = 0. \end{aligned}$$

- f es una función cuadrática, con

$$\nabla^2 f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = 2 \text{diag}(R_1, R_2, R_3, R_4)$$

DP, por lo que f es fuertemente convexa y coerciva sobre el conjunto factible (una variedad afín).

La naturaleza como minimizador local analógico

- Hay que resolver

$$\begin{aligned} P : \quad \text{Min} \quad & f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = \sum_{i=1}^5 R_i l_i^2 \\ \text{s.a} \quad & l_1 + l_2 = l, \\ & l_1 - l_3 - l_4 = 0, \\ & l_2 + l_3 - l_5 = 0. \end{aligned}$$

- f es una función cuadrática, con

$$\nabla^2 f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = 2 \text{diag}(R_1, R_2, R_3, R_4)$$

DP, por lo que f es fuertemente convexa y coerciva sobre el conjunto factible (una variedad afín).

- Por lo tanto, P tiene una solución óptima única, que se obtiene a partir de la condición de optimalidad (de Lagrange o de KKT).

La naturaleza como minimizador local analógico

- Condición de optimalidad (Lagrange): $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (multiplicadores) tales que

$$-2 \begin{pmatrix} R_1 I_1 \\ R_2 I_2 \\ R_3 I_3 \\ R_4 I_4 \\ R_5 I_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La naturaleza como minimizador local analógico

- Condición de optimalidad (Lagrange): $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (multiplicadores) tales que

$$-2 \begin{pmatrix} R_1 I_1 \\ R_2 I_2 \\ R_3 I_3 \\ R_4 I_4 \\ R_5 I_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Es un sistema de 11 ecuaciones lineales y 8 incógnitas del que pueden eliminarse (Gauss mediante) λ_1 , λ_2 y λ_3 para obtener las **leyes de Kirchoff** para ese circuito:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 = I \\ I_1 - I_3 - I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0 \end{array} \right\}$$

La naturaleza como minimizador local analógico

- El problema P de arriba se puede escribir como

$$\begin{aligned} P: \quad \text{Min} \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + a^T x + b \\ \text{s.a} \quad & Mx = d, \end{aligned}$$

con $A \in S_n$ DP, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, M matriz $m \times n$ rango fila completa y $d \in \mathbb{R}^m$.

La naturaleza como minimizador local analógico

- El problema P de arriba se puede escribir como

$$\begin{aligned} P: \quad \text{Min} \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + a^T x + b \\ \text{s.a} \quad & Mx = d, \end{aligned}$$

con $A \in S_n$ DP, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, M matriz $m \times n$ rango fila completa y $d \in \mathbb{R}^m$.

- Se demuestra que la única solución óptima de P es

$$\bar{x} = A^{-1}M^T \left(MA^{-1}M^T \right)^{-1} (MA^{-1}a + d) - A^{-1}a$$

La naturaleza como minimizador local analógico

- El problema P de arriba se puede escribir como

$$\begin{aligned} P: \quad \text{Min} \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + a^T x + b \\ \text{s.a} \quad & Mx = d, \end{aligned}$$

con $A \in S_n$ DP, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, M matriz $m \times n$ rango fila completa y $d \in \mathbb{R}^m$.

- Se demuestra que la única solución óptima de P es

$$\bar{x} = A^{-1}M^T \left(MA^{-1}M^T \right)^{-1} (MA^{-1}a + d) - A^{-1}a$$

- Esta fórmula cerrada solo se usa cuando m y n son pequeños. De no ser así, es preferible resolver sistemas de ecuaciones lineales a invertir matrices.
Aragón et al. (2019, p. 148).

El método de mínimos cuadrados

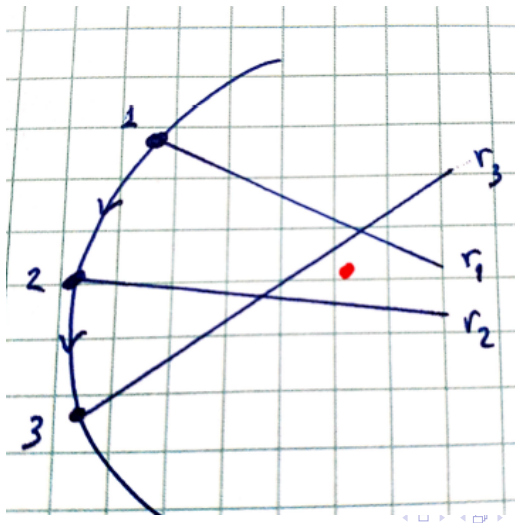
El método de mínimos cuadrados

"De todos los principios que se pueden proponer, pienso que ninguno es más general, más exacto y más fácil de aplicar que el consistente en minimizar la suma de los cuadrados de los errores".
Legendre, Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, 1805.

El método de mínimos cuadrados

Aplicación a la etología

Localización de animales equipados con microtransmisores.



El método de mínimos cuadrados

- La antena del vehículo, ubicado en la posición z^i (GPS) recibe la señal en la dirección d^i .

El método de mínimos cuadrados

- La antena del vehículo, ubicado en la posición z^i (GPS) recibe la señal en la dirección d^i .
- Eliminando t en el sistema $x = z^i + td^i$, $i = 1, 2, 3$, se obtiene la ecuación

$$\frac{x_1 - z_1^i}{d_1^i} = \frac{x_2 - z_2^i}{d_2^i},$$

que podemos escribir como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

El método de mínimos cuadrados

- La antena del vehículo, ubicado en la posición z^i (GPS) recibe la señal en la dirección d^i .
- Eliminando t en el sistema $x = z^i + td^i$, $i = 1, 2, 3$, se obtiene la ecuación

$$\frac{x_1 - z_1^i}{d_1^i} = \frac{x_2 - z_2^i}{d_2^i},$$

que podemos escribir como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

- Llamando $A = [a_{ij}]$ (matriz 3×2) y $b = (b_1, b_2, b_3)^T$, obtenemos un sistema lineal $\{Ax = b\}$ inconsistente.

El método de mínimos cuadrados

- La antena del vehículo, ubicado en la posición z^i (GPS) recibe la señal en la dirección d^i .
- Eliminando t en el sistema $x = z^i + td^i$, $i = 1, 2, 3$, se obtiene la ecuación

$$\frac{x_1 - z_1^i}{d_1^i} = \frac{x_2 - z_2^i}{d_2^i},$$

que podemos escribir como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

- Llamando $A = [a_{ij}]$ (matriz 3×2) y $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$, obtenemos un sistema lineal $\{Ax = b\}$ inconsistente.
- En general, se busca una solución aproximada del sistema inconsistente $\{Ax = b\}$, con A ($m \times n$), $m \geq n$, y $b \in \mathbb{R}^m$, minimizando alguna norma del vector de residuos

$$r = Ax - b \in \mathbb{R}^m$$

El método de mínimos cuadrados

Aplicación a la astronomía

- Lo mismo hizo Laplace en astronomía, donde cada observación proporciona una recta $x = z^i + td^i$, $i = 1, \dots, m$, i.e.,

$$\frac{x_1 - z_1^i}{d_1^i} = \frac{x_2 - z_2^i}{d_2^i} = \frac{x_3 - z_3^i}{d_3^i},$$

que pasa por el telescopio y por el cuerpo estelar detectado.

El método de mínimos cuadrados

Aplicación a la astronomía

- Lo mismo hizo Laplace en astronomía, donde cada observación proporciona una recta $x = z^i + td^i$, $i = 1, \dots, m$, i.e.,

$$\frac{x_1 - z_1^i}{d_1^i} = \frac{x_2 - z_2^i}{d_2^i} = \frac{x_3 - z_3^i}{d_3^i},$$

que pasa por el telescopio y por el cuerpo estelar detectado.

- Laplace resolvió aproximadamente sistemas de $2m$ ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ mediante el problema de optimización

$$P_\infty : \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_\infty,$$

que se puede reformular vía PL.

El método de mínimos cuadrados

Aplicación a la astronomía

- Lo mismo hizo Laplace en astronomía, donde cada observación proporciona una recta $x = z^i + td^i$, $i = 1, \dots, m$, i.e.,

$$\frac{x_1 - z_1^i}{d_1^i} = \frac{x_2 - z_2^i}{d_2^i} = \frac{x_3 - z_3^i}{d_3^i},$$

que pasa por el telescopio y por el cuerpo estelar detectado.

- Laplace resolvió aproximadamente sistemas de $2m$ ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ mediante el problema de optimización

$$P_\infty : \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_\infty,$$

que se puede reformular vía PL.

- El astrónomo Gauss (descubridor de Ceres en 1801) prefería la norma L_2 porque el problema tenía entonces una solución única que calculaba resolviendo un sistema lineal via eliminación.

El método de mínimos cuadrados

Versión matricial del método de mínimos cuadrados

- Preferimos asociar al sistema inconsistente $\{Ax = b\}$, con A $(m \times n)$, $m \geq n$, y $b \in \mathbb{R}^m$, el problema de optimización

$$P_2 : \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

El método de mínimos cuadrados

Versión matricial del método de mínimos cuadrados

- Preferimos asociar al sistema inconsistente $\{Ax = b\}$, con A $(m \times n)$, $m \geq n$, y $b \in \mathbb{R}^m$, el problema de optimización

$$P_2 : \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

- Se demuestra que el conjunto óptimo F_2^* es el conjunto solución del sistema

$$\left\{ (A^T A) x = A^T b \right\}$$

El método de mínimos cuadrados

Versión matricial del método de mínimos cuadrados

- Preferimos asociar al sistema inconsistente $\{Ax = b\}$, con A $(m \times n)$, $m \geq n$, y $b \in \mathbb{R}^m$, el problema de optimización

$$P_2 : \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

- Se demuestra que el conjunto óptimo F_2^* es el conjunto solución del sistema

$$\left\{ (A^T A) x = A^T b \right\}$$

- Si las columnas de A son LI, $|F_2^*| = 1$.

El método de mínimos cuadrados

Versión matricial del método de mínimos cuadrados

- Preferimos asociar al sistema inconsistente $\{Ax = b\}$, con A $(m \times n)$, $m \geq n$, y $b \in \mathbb{R}^m$, el problema de optimización

$$P_2 : \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

- Se demuestra que el conjunto óptimo F_2^* es el conjunto solución del sistema

$$\left\{ (A^T A) x = A^T b \right\}$$

- Si las columnas de A son LI, $|F_2^*| = 1$.
- Si las columnas de A son LD y $\bar{x}$ es una solución de $\left\{ (A^T A) x = A^T b \right\}$, entonces

$$F_2^* = \bar{x} + \ker A$$

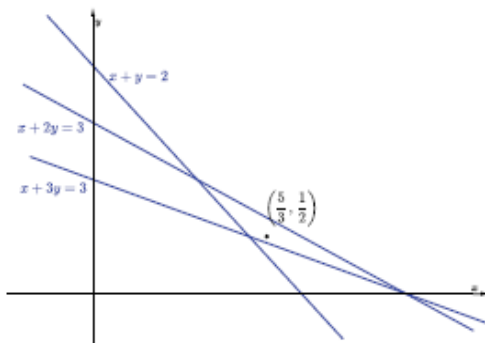
Aragón et al. (2019, p. 102, y 2026).

El método de mínimos cuadrados

Por ejemplo, la solución aproximada por mínimos cuadrados de

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{array} \right\}$$

es



El modelo interindustrial de Leontief

El modelo interindustrial de Leontief

Nadie podría imaginar en 1929 que los métodos numéricos para la resolución de sistemas lineales acudirían al rescate de la economía norteamericana y, menos aún, que lo harían de la mano de un economista formado en la URSS con fuerte formación matemática: [Wassily Leontief](#).



El modelo interindustrial de Leontief

- Supongamos que dividimos la economía de un país en n sectores distintos, cada uno productor de una sola clase de bien, mediante la transformación de los bienes producidos por los restantes sectores.

El modelo interindustrial de Leontief

- Supongamos que dividimos la economía de un país en n sectores distintos, cada uno productor de una sola clase de bien, mediante la transformación de los bienes producidos por los restantes sectores.
- Supongamos que el primer sector es el extractor de carbón y que el segundo es el productor de acero.

El modelo interindustrial de Leontief

- Supongamos que dividimos la economía de un país en n sectores distintos, cada uno productor de una sola clase de bien, mediante la transformación de los bienes producidos por los restantes sectores.
- Supongamos que el primer sector es el extractor de carbón y que el segundo es el productor de acero.
- Llamamos a_{11} al número de Tm de carbón que se han utilizado para extraer una Tm de carbón: $0 \leq a_{11} \leq 1$.

El modelo interindustrial de Leontief

- Supongamos que dividimos la economía de un país en n sectores distintos, cada uno productor de una sola clase de bien, mediante la transformación de los bienes producidos por los restantes sectores.
- Supongamos que el primer sector es el extractor de carbón y que el segundo es el productor de acero.
- Llamamos a_{11} al número de Tm de carbón que se han utilizado para extraer una Tm de carbón: $0 \leq a_{11} \leq 1$.
- Llamamos a_{12} al número de Tm de carbón que se requieren para producir una Tm de acero: $a_{12} \geq 0$.

El modelo interindustrial de Leontief

- Supongamos que dividimos la economía de un país en n sectores distintos, cada uno productor de una sola clase de bien, mediante la transformación de los bienes producidos por los restantes sectores.
- Supongamos que el primer sector es el extractor de carbón y que el segundo es el productor de acero.
- Llamamos a_{11} al número de Tm de carbón que se han utilizado para extraer una Tm de carbón: $0 \leq a_{11} \leq 1$.
- Llamamos a_{12} al número de Tm de carbón que se requieren para producir una Tm de acero: $a_{12} \geq 0$.
- En general, los coeficientes tecnológicos a_{ij} satisfacen $a_{ij} \geq 0$, con $0 \leq a_{ij} \leq 1$.

El modelo interindustrial de Leontief

- Si $\bar{x}_1$ denota la **producción total** de carbón durante el último año, $a_{11}\bar{x}_1$ es el número de Tm de carbón consumidas por el propio sector del carbón.

El modelo interindustrial de Leontief

- Si $\bar{x}_1$ denota la **producción total** de carbón durante el último año, $a_{11}\bar{x}_1$ es el número de Tm de carbón consumidas por el propio sector del carbón.
- Si $\bar{x}_2$ denota la **producción total** de acero durante el último año, $a_{12}\bar{x}_2$ es el número de Tm de carbón consumidas por el sector del acero, etc.

El modelo interindustrial de Leontief

- Si $\bar{x}_1$ denota la **producción total** de carbón durante el último año, $a_{11}\bar{x}_1$ es el número de Tm de carbón consumidas por el propio sector del carbón.
- Si $\bar{x}_2$ denota la **producción total** de acero durante el último año, $a_{12}\bar{x}_2$ es el número de Tm de carbón consumidas por el sector del acero, etc.
- El consumo total de carbón por el conjunto de los sectores productivos será pues la suma

$$a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n.$$

El modelo interindustrial de Leontief

- Si $\bar{x}_1$ denota la **producción total** de carbón durante el último año, $a_{11}\bar{x}_1$ es el número de Tm de carbón consumidas por el propio sector del carbón.
- Si $\bar{x}_2$ denota la **producción total** de acero durante el último año, $a_{12}\bar{x}_2$ es el número de Tm de carbón consumidas por el sector del acero, etc.
- El consumo total de carbón por el conjunto de los sectores productivos será pues la suma

$$a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n.$$

- La diferencia entre la producción total de carbón y el carbón utilizado en la producción de otros bienes y servicios,

$$\bar{x}_1 - (a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n),$$

es la **demanda final de carbón**, $\bar{d}_1$ (el carbón consumido por entes no productivos: hogares, etc.).

El modelo interindustrial de Leontief

- Así, pues, el balance material de carbón es

$$a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n = \bar{x}_1 - \bar{d}_1$$

El modelo interindustrial de Leontief

- Así, pues, el balance material de carbón es

$$a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n = \bar{x}_1 - \bar{d}_1$$

- El balance material del último ejercicio es, pues,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a_{11})\bar{x}_1 - \dots - a_{1n}\bar{x}_n = \bar{d}_1 \\ \vdots \\ -a_{n1}\bar{x}_1 - \dots + (1 - a_{nn})\bar{x}_n = \bar{d}_n \end{array} \right\}$$

El modelo interindustrial de Leontief

- Así, pues, el balance material de carbón es

$$a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n = \bar{x}_1 - \bar{d}_1$$

- El balance material del último ejercicio es, pues,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a_{11})\bar{x}_1 - \dots - a_{1n}\bar{x}_n = \bar{d}_1 \\ \vdots \\ -a_{n1}\bar{x}_1 - \dots + (1 - a_{nn})\bar{x}_n = \bar{d}_n \end{array} \right\}$$

- Si se desea que el año próximo las demandas finales sean $d_1, \dots, d_n$, en lugar de $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$, hay que resolver un sistema de ecuaciones e inecuaciones llamado **modelo de Leontief o insumo-producto (input-output)**.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a_{11})x_1 - \dots - a_{1n}x_n = d_1 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - \dots + (1 - a_{nn})x_n = d_n \\ x_1 \geq 0; \dots; x_n \geq 0 \end{array} \right\}$$

El modelo interindustrial de Leontief

Los tres retos matemáticos

- En 1933, el keynesiano Franklin Delano Roosevelt asumió la presidencia de los EEUU y lanzó el llamado 'New Deal', basado en inyectar dinero público de forma controlada para incrementar gradualmente las demandas, $d_1, \dots, d_n$, actualizar periódicamente los coeficientes tecnológicos a_{ij} y resolver el modelo de Leontief con las demandas previstas para el siguiente ejercicio fiscal.

El modelo interindustrial de Leontief

Los tres retos matemáticos

- En 1933, el keynesiano Franklin Delano Roosevelt asumió la presidencia de los EEUU y lanzó el llamado 'New Deal', basado en inyectar dinero público de forma controlada para incrementar gradualmente las demandas, $d_1, \dots, d_n$, actualizar periódicamente los coeficientes tecnológicos a_{ij} y resolver el modelo de Leontief con las demandas previstas para el siguiente ejercicio fiscal.
- El modelo de Leontief planteaba tres retos a los matemáticos:

El modelo interindustrial de Leontief

Los tres retos matemáticos

- En 1933, el keynesiano Franklin Delano Roosevelt asumió la presidencia de los EEUU y lanzó el llamado 'New Deal', basado en inyectar dinero público de forma controlada para incrementar gradualmente las demandas, $d_1, \dots, d_n$, actualizar periódicamente los coeficientes tecnológicos a_{ij} y resolver el modelo de Leontief con las demandas previstas para el siguiente ejercicio fiscal.
- El modelo de Leontief planteaba tres retos a los matemáticos:
- ¿Cómo calcular $(x_1, \dots, x_n)$ cuando n es grande?

El modelo interindustrial de Leontief

Los tres retos matemáticos

- En 1933, el keynesiano Franklin Delano Roosevelt asumió la presidencia de los EEUU y lanzó el llamado 'New Deal', basado en inyectar dinero público de forma controlada para incrementar gradualmente las demandas, $d_1, \dots, d_n$, actualizar periódicamente los coeficientes tecnológicos a_{ij} y resolver el modelo de Leontief con las demandas previstas para el siguiente ejercicio fiscal.
- El modelo de Leontief planteaba tres retos a los matemáticos:
- ¿Cómo calcular $(x_1, \dots, x_n)$ cuando n es grande?
- ¿Puede asegurarse a priori que hay una solución $(x_1, \dots, x_n)$ única del sistema de ecuaciones tal que $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$?

Los tres retos matemáticos

- En 1933, el keynesiano Franklin Delano Roosevelt asumió la presidencia de los EEUU y lanzó el llamado 'New Deal', basado en inyectar dinero público de forma controlada para incrementar gradualmente las demandas, $d_1, \dots, d_n$, actualizar periódicamente los coeficientes tecnológicos a_{ij} y resolver el modelo de Leontief con las demandas previstas para el siguiente ejercicio fiscal.
- El modelo de Leontief planteaba tres retos a los matemáticos:
- ¿Cómo calcular $(x_1, \dots, x_n)$ cuando n es grande?
- ¿Puede asegurarse a priori que hay una solución $(x_1, \dots, x_n)$ única del sistema de ecuaciones tal que $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$?
- ¿Es estable $(x_1, \dots, x_n)$? Con mayor precisión: ¿puede asegurarse que las producciones $x_1, \dots, x_n$ varían suavemente con los a_{ij} y los d_i ?

El modelo interindustrial de Leontief

- Leontief estimó los coeficientes a_{ij} de la economía estadounidense (tablas input-output) de 1929 para $n = 46$ sectores ...

El modelo interindustrial de Leontief

- Leontief estimó los coeficientes a_{ij} de la economía estadounidense (tablas input-output) de 1929 para $n = 46$ sectores ...
- ... pero le resultó imposible calcular los x_i mediante la regla de Cramer (en 1931 confesó a Schumpeter que estaba "luchando" con la teoría de determinantes).



El modelo interindustrial de Leontief

- Leontief estimó los coeficientes a_{ij} de la economía estadounidense (tablas input-output) de 1929 para $n = 46$ sectores ...
- ... pero le resultó imposible calcular los x_i mediante la regla de Cramer (en 1931 confesó a Schumpeter que estaba "luchando" con la teoría de determinantes).



- Reduciendo n a 10 al agregar industrias, estimó en 2 años lo que tardaría un ayudante "computador" en resolver el sistema, cosa que consiguió finalmente con ayuda de una máquina ad hoc diseñada por John Wilbur (del MIT).

El modelo interindustrial de Leontief

- n fue creciendo conforme aumentó la eficiencia de los algoritmos utilizados para resolver sistemas lineales $n \times n$. En la actualidad, $n \approx 500$ para los países de la UE.

El modelo interindustrial de Leontief

- n fue creciendo conforme aumentó la eficiencia de los algoritmos utilizados para resolver sistemas lineales $n \times n$. En la actualidad, $n \approx 500$ para los países de la UE.
- Desde 1949 se sabe que siempre existe una solución única del sistema lineal, $(x_1, \dots, x_n)$, tal que $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ (Teorema de Hawkins y Simon).

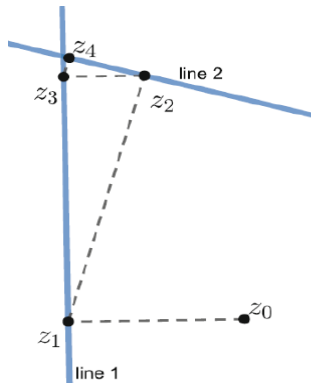
El modelo interindustrial de Leontief

- n fue creciendo conforme aumentó la eficiencia de los algoritmos utilizados para resolver sistemas lineales $n \times n$. En la actualidad, $n \approx 500$ para los países de la UE.
- Desde 1949 se sabe que siempre existe una solución única del sistema lineal, $(x_1, \dots, x_n)$, tal que $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ (Teorema de Hawkins y Simon).
- La regla de Cramer garantiza que $x_1, \dots, x_n$ apenas varían si los coeficientes tecnológicos a_{ij} varían poco. Por eso se actualizan cada 5 años en la UE.

El modelo interindustrial de Leontief

El método de proyecciones alternadas para ecuaciones

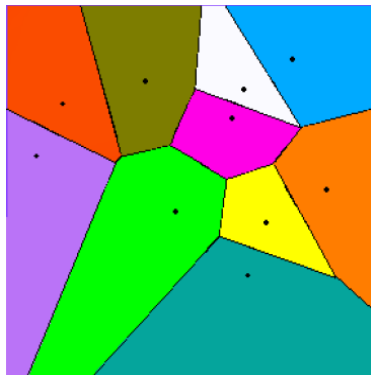
Von Neumann y Kaczmarz propusieron en 1932 y en 1937, resp., el **método de proyecciones alternadas** que, para $n = 2$ en espacios de Hilbert, construye una sucesión de proyecciones ortogonales sobre las dos rectas (*line 1* y *line 2*), representadas por las ecuaciones, que converge a su intersección:



Diagramas de Voronoi

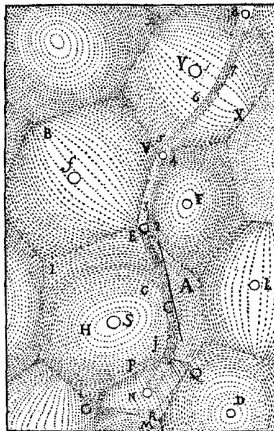
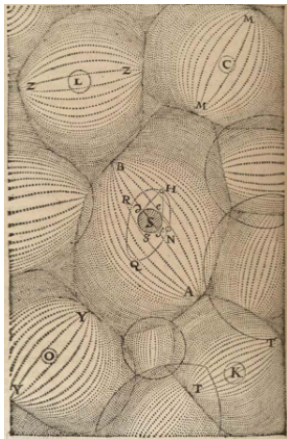
Diagramas de Voronoi

Dados m puntos de $\mathbb{R}^2$, la celda de Voronoi de uno de ellos s está formada por aquellos puntos que están igual o más cerca de s que de los restantes $m - 1$ puntos. El diagrama de Voronoi es la familia de las m celdas. Ejemplo para $m = 10$:



Diagramas de Voronoi

Teselación del universo en "vórtices" (Descartes, 1644), un modelo que quedó obsoleto tras la publicación de la ley de gravitación universal (Newton, 1687).



Diagramas de Voronoi

Voronoi extendió esa teselación a $\mathbb{R}^n$ en 1908, utilizándolos en cristalografía:

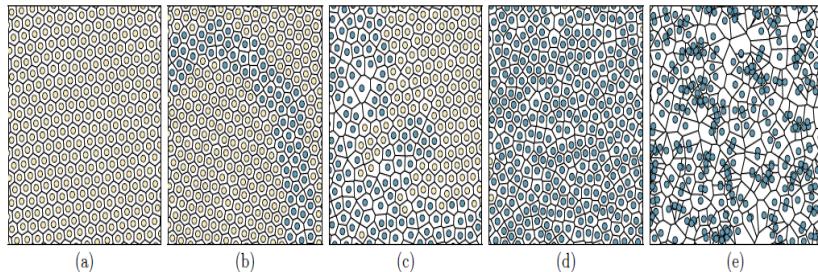
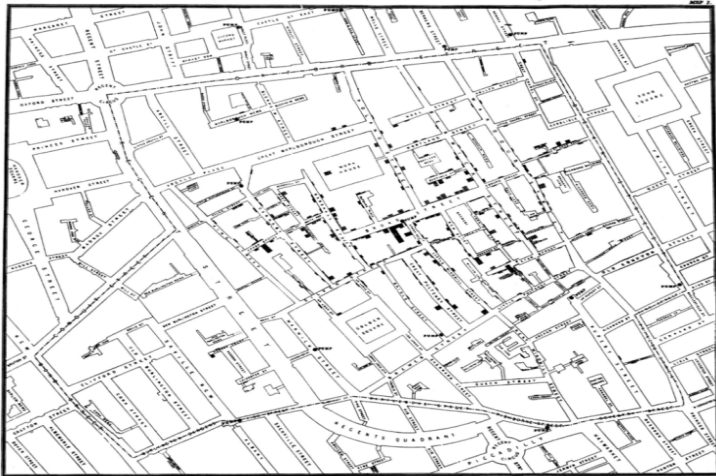


FIG. 5. (a) Defect-free crystal, (b) two crystals meeting along a grain boundary, (c) crystal-liquid interface, (d) liquid, and (e) an ideal gas. Particles whose Voronoi cells and neighbors are all hexagons are colored yellow; all others are colored blue.

Más detalles en Lazar, Lu y Rycroft (2022).

Diagramas de Voronoi

El cólera el Soho londinense en 1854 (mapa de Snow)



Diagramas de Voronoi

Hagamos un zoom del mapa cerca de Broad St.:



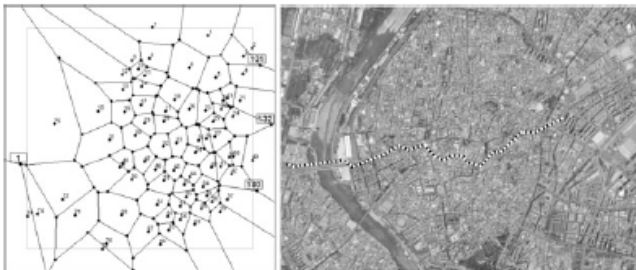
Diagramas de Voronoi

Asignación de hospitales en Río de Janeiro en 2000



Diagramas de Voronoi

Diseño de una línea de metro en Sevilla en 2009



Aragón y Goberna (2024a, pp. 47-49) y Aragón y Goberna (2024b, pp. 89-93).

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

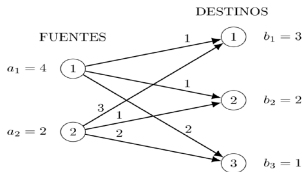
Un problema de transporte

- Se desea suministrar diésel desde p depósitos (fuentes) a un conjunto de q bases (destinos) con un presupuesto $M > 0$ para la operación de transporte.

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

Un problema de transporte

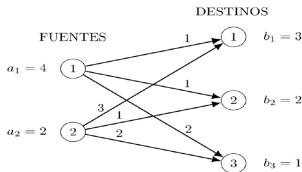
- Se desea suministrar diésel desde p depósitos (fuentes) a un conjunto de q bases (destinos) con un presupuesto $M > 0$ para la operación de transporte.
- Un ejemplo de juguete con $p = 2$, $q = 3$ y $M = 8$:



El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

Un problema de transporte

- Se desea suministrar diésel desde p depósitos (fuentes) a un conjunto de q bases (destinos) con un presupuesto $M > 0$ para la operación de transporte.
- Un ejemplo de juguete con $p = 2$, $q = 3$ y $M = 8$:

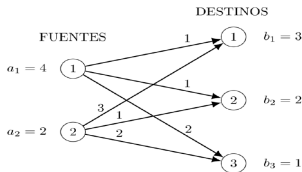


- Si p y q son grandes se requiere un **modelo matemático**.

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

Un problema de transporte

- Se desea suministrar diésel desde p depósitos (fuentes) a un conjunto de q bases (destinos) con un presupuesto $M > 0$ para la operación de transporte.
- Un ejemplo de juguete con $p = 2$, $q = 3$ y $M = 8$:



- Si p y q son grandes se requiere un modelo matemático.
- Sea a_i la oferta de la fuente i , b_j la demanda del destino j , c_{ij} el coste unitario del arco (i, j) , y x_{ij} la cantidad a enviar por ese arco.

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

- **Restricciones:**

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

- **Restricciones:**
- Satisfacción de la demanda de todos los destinos:

$$x_{1j} + \dots + x_{pj} = b_j, j = 1, \dots, q$$

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

- **Restricciones:**
- Satisfacción de la demanda de todos los destinos:

$$x_{1j} + \dots + x_{pj} = b_j, j = 1, \dots, q$$

- Saturación de la oferta de todas las fuentes:

$$x_{i1} + \dots + x_{iq} = a_i, i = 1, \dots, p$$

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

- **Restricciones:**
- Satisfacción de la demanda de todos los destinos:

$$x_{1j} + \dots + x_{pj} = b_j, j = 1, \dots, q$$

- Saturación de la oferta de todas las fuentes:

$$x_{i1} + \dots + x_{iq} = a_i, i = 1, \dots, p$$

- Restricciones físicas:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$$

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

- **Restricciones:**

- Satisfacción de la demanda de todos los destinos:

$$x_{1j} + \dots + x_{pj} = b_j, j = 1, \dots, q$$

- Saturación de la oferta de todas las fuentes:

$$x_{i1} + \dots + x_{iq} = a_i, i = 1, \dots, p$$

- Restricciones físicas:

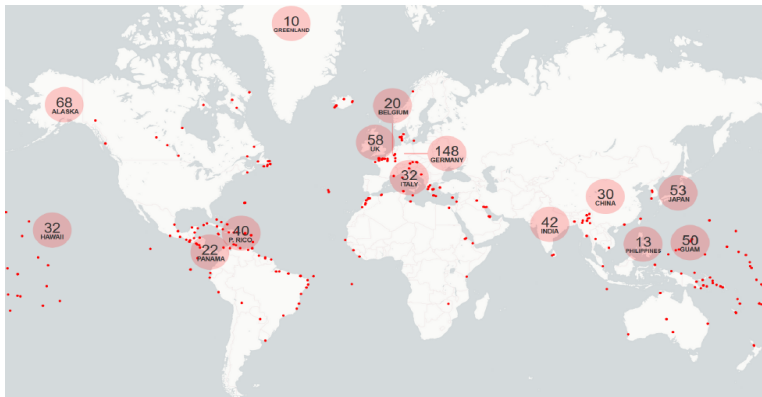
$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$$

- Restricción presupuestaria:

$$c_{11}x_{11} + \dots + c_{pq}x_{pq} \leq M$$

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

La dificultad para suministrar diésel a las bases militares estadounidenses era **la enorme cantidad, *pq*, de variables.**

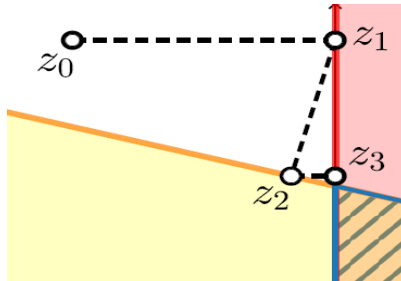


Principales bases militares USA en el extranjero en 1945

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

El método de proyecciones alternadas para inecuaciones

Si $n = 2$ y solo hay 2 inecuaciones, se trata de aproximar un punto en la intersección de dos semiplanos, uno por inecuación:



El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945

La transición de la factibilidad a la optimización

En 1946 yo era asesor matemático de la Fuerza Aérea de los EEUU en el Pentágono.(...). *Me pidieron que encontrara una manera de calcular más rápidamente un plan de despliegue, capacitación y suministro logístico por etapas. En aquella época, "mecanizar" la planificación significaba utilizar dispositivos analógicos o equipos de tarjetas perforadas (...). A finales de 1946 éramos conscientes de que iban a existir los ordenadores. Pero una vez que tomamos conciencia, el ordenador se tornó vital para nuestra mecanización del proceso de planificación. Tan vital era que nuestro grupo consiguió que el Pentágono financiara el desarrollo de los ordenadores.*

George Dantzig (1991)

El abastecimiento de las bases norteamericanas en 1945



ENIAC, US Army Photo, 1946

Aragón y Goberna (2024a, pp. 67-70) y Aragón y Goberna (2024b, pp. 114-117)

La transición de la factibilidad a la optimización

El resultado básico acerca de los problemas de optimización no lineal diferenciable es el **Teorema de KKT** (1939 y 1951), que proporciona condiciones para la optimalidad de una solución factible $\bar{x}$ de

$$\begin{array}{ll} P : & \text{Min } f(x) \\ & \text{s.a } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}$$

en términos de la existencia de solución para el **sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales**

$$\left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = -\nabla f(\bar{x}) ; \lambda_i \geq 0, i \in I(\bar{x}) \right\},$$

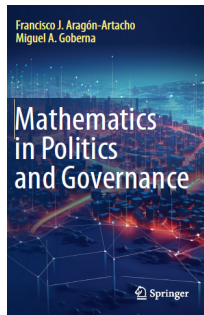
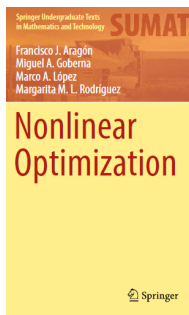
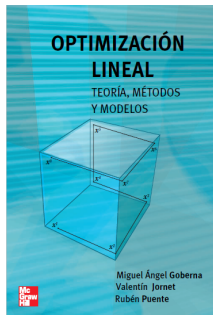
donde $I(\bar{x}) := \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0\}$ es el conjunto de índices activos en $\bar{x}$.

REFERENCIAS

-  Aragón, Goberna (2024a). Mathematics in Politics and Governance, Springer.
-  Aragón y Goberna (2024b). Matemáticas en política y gobernanza. Catarata.
-  Aragón, Goberna, López, y Rodríguez (2019). Nonlinear Optimization, Springer.
-  Aragón, Goberna, López, y Rodríguez (2026). Continuous optimization, Springer (en progreso).
-  Descartes (1637). Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences (hay pdf disponible de la versión en español).

-  Descartes (1644). Principia Philosophiae. Ludovicus Elzevirius, Amsterdam (hay pdf disponible de la versión en español).
-  Goberna, Jornet y Puente (2004). Optimización lineal: teoría, métodos y modelos. McGraw-Hill.
-  Lazar, Lu y Rycroft (2022). Voronoi cell analysis: The shapes of particle systems. Am. J. Phys. 90, 469-480.
-  Newton (1687). Philosophiæ naturalis principia mathematica (hay pdf disponible de la versión en español).
-  Voronoi (1908) Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.
Part I: 133: 97-178; Part II: 134: 198-287.

Portadas de los 4 libros publicados con mis colaboradores:



mgoberna@ua.es

Gracias por su atención