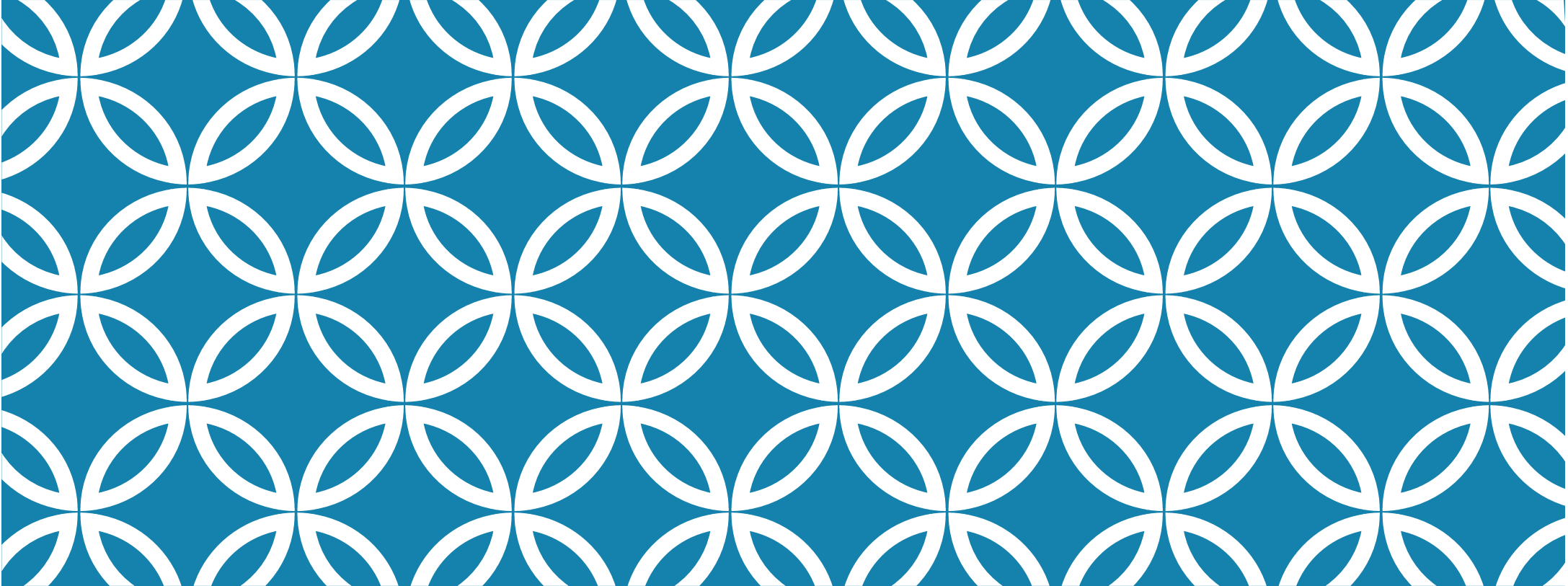




DE LAGRANGE A HILBERT: ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS Y RIGOR LÓGICO

José Ferreirós
Universidad de Córdoba

- M. Stifel: “así como un número infinito no es un número, un número irracional no es un verdadero número, pues se haya oculto en una especie de nube de infinitud.” (1544, *Arithmetica integra*)

- R. Dedekind, en 1872: “se obtienen así auténticas demostraciones de teoremas – como por ejemplo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ – que, por lo que sé, nunca hasta ahora han sido probados.”
 - “Lo que es demostrable, no debe ser creído en la ciencia sin demostración.” (1887)



THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse.

1. ON appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x , nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f , ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

A

IV. Axiome der Stetigkeit.

IV 1. (Archimedisches Axiom.) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addiren, daß die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + \dots + a > b.$$

IV 2. (Axiom der Vollständigkeit.) Es ist nicht möglich, dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome I, II, III, IV 1 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Einige der Axiome I 1—6, II 1—6, III 1—4, IV 1—2 sind Folgen der übrigen, und es entsteht so die Aufgabe, die logische Abhängigkeit der genannten Axiome zu erörtern. Für die Untersuchung der Principien der Arithmetik liefert diese Aufgabe manchen neuen und fruchtbaren Gesichtspunkt. Wir erkennen beispielsweise folgende Thatsachen:

Die Existenz der Zahl 0 (Axiom I 3) ist eine Folge der Axiome I 1, 2 und II 1; sie beruht also wesentlich auf dem associativen Gesetz der Addition.

Die Existenz der Zahl 1 (Axiom I 6) ist eine Folge der Axiome I 4, 5 und II 3; sie beruht also wesentlich auf dem associativen Gesetz der Multiplication.

Das commutative Gesetz der Addition (Axiom II 2) ist eine Folge der Axiome I, II 1, 4, 5; dasselbe erscheint also im wesentlichen als eine Folge des associativen Gesetzes der Addition und der beiden distributiven Gesetze.

Beweis. Es ist

$$(a + b)(1 + 1) = (a + b)1 + (a + b)1 = a + b + a + b, \\ = a(1 + 1) + b(1 + 1) = a + a + b + b;$$

folglich

$$a + b + a + b = a + a + b + b,$$

und daher nach I 2

$$b + a = a + b.$$

Das commutative Gesetz der Multiplication (Axiom II 6) ist eine Folge der Axiome I, II 1—5, III, IV 1, dagegen nicht schon eine Folge der Axiome I, II 1—5, III; jenes Gesetz kann hiernach aus den übrigen Axiomen dann und nur dann gefolgert werden, wenn man das Archimedische Axiom (Axiom IV 1) hinzuzieht. Diese Thatsache hat für die Grundlagen der Geometrie eine besondere Bedeutung.*)

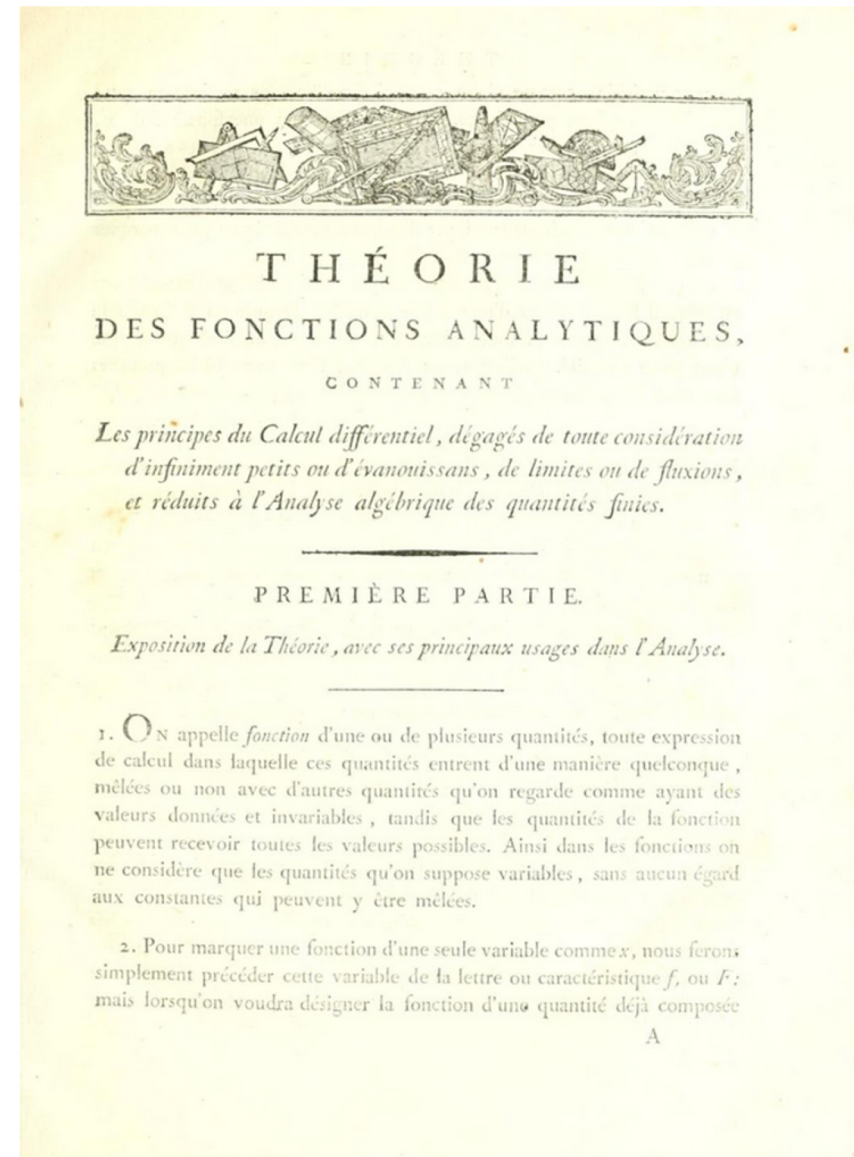
*) Vgl. D. Hilbert l. c. Kap. VI.

LAGRANGE 1797

Teoría de las funciones analíticas: conteniendo

Los principios del cálculo diferencial, liberados de toda consideración de infinitésimos o [cantidades] evanescentes, de límites o de fluxiones, y reducidos al análisis algebraico de cantidades finitas

- Función primitiva $f(x)$ y funciones derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ...



HILBERT 1900

“A pesar del gran valor pedagógico y heurístico del método genético, para una exposición definitiva y un completo aseguramiento lógico del contenido de nuestro conocimiento, merece preferencia el método axiomático.”

“Los axiomas de la aritmética [para $\mathbf{R}$] no son, en esencia, nada más que las conocidas reglas de cálculo, con el añadido del axioma de continuidad.”
(1900)

$$\Sigma: P_1, P_2, \dots,$$

das die drei Eigenschaften besitzt:

1. Die Anzahl der Producte P ist endlich.
2. Keines der P ist durch ein anderes teilbar.
3. Jedes R in S ist durch mindestens eines der P teilbar.

In weiterer Ausführung wird der Vortrag an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Über den Zahlbegriff.

Von **David Hilbert** in Göttingen.

Wenn wir in der Litteratur die zahlreichen Arbeiten über die Principien der Arithmetik und über die Axiome der Geometrie überschauen und mit einander vergleichen, so nehmen wir neben zahlreichen Analogien und Verwandtschaften dieser beiden Gegenstände doch hinsichtlich der Methode der Untersuchung eine Verschiedenheit wahr.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Art und Weise der Einführung des Zahlbegriffes. Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Proceß des Zählens zunächst die weiteren ganzen rationalen positiven Zahlen 2, 3, 4 . . . entstanden und ihre Rechnungsgesetze entwickelt; sodann gelangt man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraction zur negativen Zahl; man definirt ferner die gebrochene Zahl, etwa als ein Zahlenpaar — dann besitzt jede lineare Function eine Nullstelle —, und schließlich die reelle Zahl als einen Schnitt oder eine Fundamentalreihe — dadurch erreicht man, daß jede ganze rationale indefinite, und überhaupt jede stetige indefinite Function eine Nullstelle besitzt. Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffes die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch successive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffes erzeugt wird.

UNA HISTORIA MUY CONOCIDA

Idea intuitiva de número real desde los griegos, o los babilonios...

Eudoxo da su teoría de proporciones “fundada axiomáticamente” (Euclides, libro V)

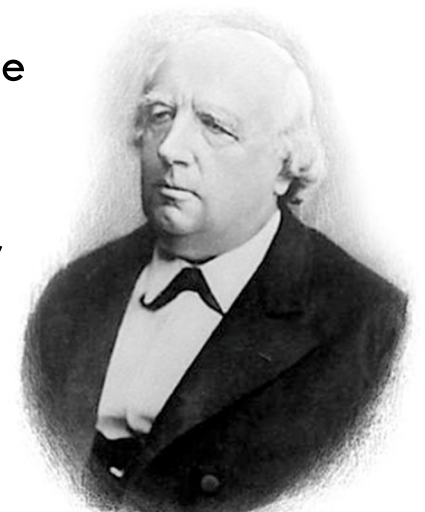
Bolzano, ‘Demostración puramente analítica...’ (1817): da un razonamiento para el criterio de Cauchy que “no era (y no podía ser) otra cosa que un círculo vicioso”, pero fuera de ese punto es totalmente correcto y muy notable

Con Bolzano y **Cauchy** surge el proyecto de **aritmética** del análisis

Los detalles vendrían con Grassmann, **Weierstrass**, Dedekind, Méray, Cantor, Peano, ... ε - δ ...

- Por el camino, surge la teoría de conjuntos y la lógica matemática.

Finalmente, Hilbert impone el método axiomático moderno.



UNA HISTORIA MUY CONOCIDA

Idea intuitiva de número real desde los griegos, o los babilonios...

Eudoxo da su teoría de proporciones “fundada axiomáticamente” (Euclides, libro V)

Bolzano, ‘Demostración puramente analítica...’ (1817): da un razonamiento para el criterio de Cauchy que “no era (y no podía ser) otra cosa que un círculo vicioso”, pero fuera de ese punto es totalmente correcto y muy notable

Con Bolzano y **Cauchy** surge el proyecto de **aritmética** del análisis

Los detalles vendrían con Grassmann, **Weierstrass**, Dedekind, Méray, Cantor, Peano, ... ϵ - δ ...

- Por el camino, surge la teoría de conjuntos y la lógica matemática.

Finalmente, Hilbert impone el método axiomático moderno.



REVISANDO LA HISTORIA

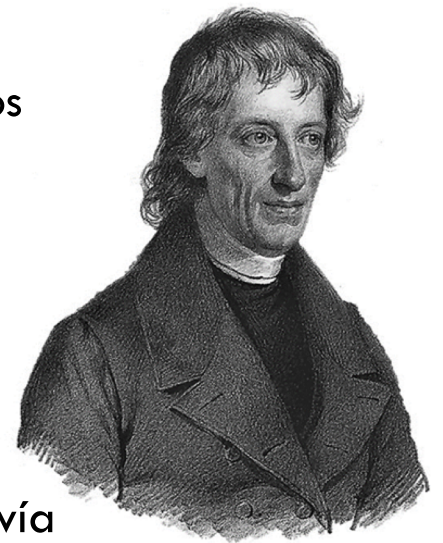
A la altura de 1800, la idea que se tiene de los reales es incompleta. En los manuales, solamente se tratan los irracionales ‘sordos’ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, etc.

J. H. Lambert introduce las ideas de *algebraico* y *transcendente*, pero esto tarda mucho en llegar a los manuales. Los irracionales e y π se estudian en investigaciones especiales.

- SER O NO SER *raiz de* $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0 = 0$, con $a_i \in \mathbb{Z}$.

Incluso Bolzano: no tiene, en 1817, un plan de aritmetización; trabaja todavía con la idea de *magnitud variable*. Igual que Cauchy.

Qué son: Secuencias? Series? Funciones? En todo caso, no son números.



Bolzano gradualmente irá cambiando hacia un programa más ‘moderno’; a la vez, tendrá que aceptar el infinito actual.

Martin Ohm (1822) parte claramente del *número natural* (ojo: dado en la intuición) para introducir formalmente los números enteros y los racionales.

- las operaciones inversas ($-$, $\div$, $\sqrt{}$) motivan la expansión, regulada por el “principio de permanencia de las formas equivalentes”.

No tiene todavía un plan para los irracionales... Hasta pasado 1850, nadie tiene una buena definición de continuidad, ni una buena definición de $\mathbf{R}$

Entre medias viene el problema de los complejos, en especial Hamilton con sus pares de reales (los reales, todavía basados en la ‘intuición’ del tiempo).

P. G. Lejeune-Dirichlet es una figura central:

teoría de números y análisis; noción de función ‘arbitraria’; y aritmetización:
“todo teorema del álgebra y del análisis superior puede enunciarse como un
teorema sobre los números naturales” – lo “he oído”, dice Dedekind, “repetidas
veces en boca de Dirichlet”.



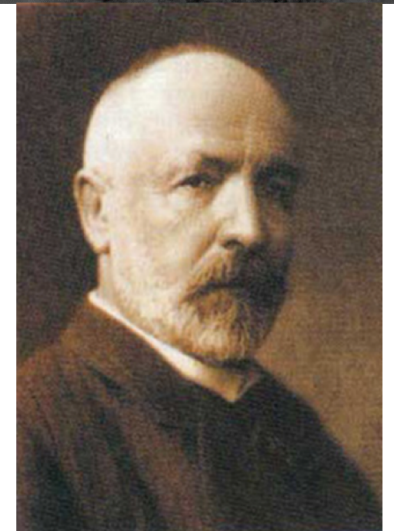
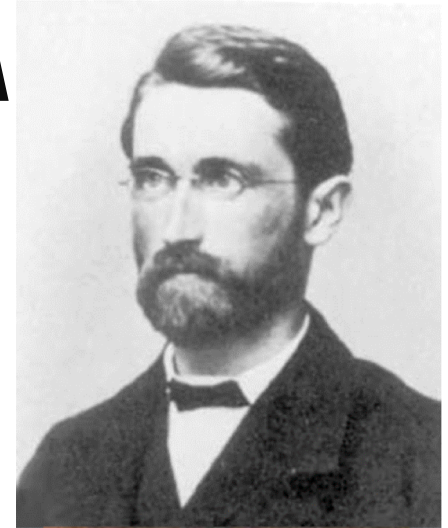
‘CONSTRUCCIONES’ ANTES QUE AXIOMÁTICA

Méray, Weierstrass, Cantor, Dedekind – en especial, 1872

“La introducción habitual de los números irracionales conecta inmediatamente con el concepto de magnitud extensiva –el cual no es definido rigurosamente nunca– y define el número como el resultado de medir una tal magnitud mediante otra homogénea.”

“En cambio, yo exijo que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma. ... [la idea de *magnitud variable* no es aritmética, y] no hay razón para dar cabida en la aritmética, en la ciencia de los números, a tales consideraciones extrañas.”

Pero ¿por qué no se dio directamente una teoría axiomática?





¿Por qué son *números* los irracionales? Cuestión ‘psicológica’ o lógica. – expansión gradual del sistema numérico.

Definiciones por ‘construcción’ infinitaria (mediante series infinitas, o conjuntos – cortaduras, o sucesiones de Cauchy) vs. axiomática.

Evitar la pura estipulación formal, o la manipulación de símbolos: no a los “símbolos hechizados, dando vueltas al mundo en pos de un significado” – necesidad de establecer *interpretaciones* (modelos).

Medios muy limitados para dar modelos, hasta que aparece la teoría de conjuntos: las definiciones de los reales son, precisamente, *ejemplos pioneros*.

Por eso, en 1870 no bastaba con un sistema axiomático tipo Hilbert.

EL CONTEXTO EDUCATIVO

Reformas en la educación superior: Paris 1794, Berlin 1810, etc. Ya con Lagrange, Ohm, Cauchy, etc.

Dedekind inventa las cortaduras en 1858, con motivo de explicar en Zurich los elementos del cálculo diferencial, en especial la noción de límite.

-- “apoyarse en evidencias geométricas” está bien desde el punto de vista didáctico, pero “no puede tener ninguna pretensión de científicidad”.

Weierstrass explica su construcción de los irracionales en sus cursos de Berlin, en concreto el curso de *Introducción a la teoría de funciones analíticas*, por ej. el de 1864 que siguió el joven G. Cantor.

El propio Cantor explicó su definición de $\mathbf{R}$ en las clases que dio en Halle el año de 1870 (Purkert & Ilgauds 1987).



Son las primeras generaciones en Alemania que dan clases de análisis a nivel superior, es el efecto de la reforma educativa – y la famosa “unidad de enseñanza e investigación”.

También es consecuencia del ascenso de la teoría de números como disciplina y como patrón de rigor. Todo tuvo lugar *unter dem Zeichen der Zahl* – bajo el signo del número (Hilbert).

Había que encontrar “una fundamentación puramente aritmética y totalmente científica de los principios del cálculo infinitesimal”.

“Las principales dificultades del análisis superior vienen precisamente de una presentación apresurada y no suficientemente detallada de las nociones básicas y de las operaciones aritméticas.” (Weierstrass en 1874)

“la mayor parte de las dificultades de principio que se han encontrado en las matemáticas, me parece que tienen su origen en no advertir la posibilidad de una teoría puramente aritmética de las magnitudes y de las variedades” (Cantor en 1882)

La clave estaba en la *definición de la continuidad, o completitud*:

- Ver la diferencia clave entre densidad ($\mathbf{Q}$) y continuidad o completitud ($\mathbf{R}$), y caracterizar la completitud.

Dedekind: Toda cortadura (L_1, L_2) sobre los puntos de la recta “es producida por” —se corresponde con— un punto P (y “el fenómeno de la cortadura” se da ya en $\mathbf{Q}$, permite *completar* el sistema)

Weierstrass y Cantor, principio de intervalos encajados: Dada una sucesión de intervalos encajados en $\mathbf{R}$, existe al menos un número contenido en todos ellos.

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Todo conjunto de infinitos puntos en $\mathbf{R}$ (o en $\mathbf{R}^n$) que está acotado, tiene un punto de acumulación.

CONCLUSIONES

Una historia más compleja: de las magnitudes a los números – la aritmetización y Dirichlet

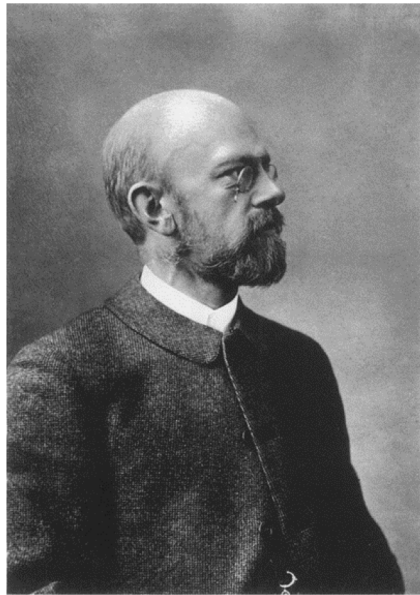
Importa el contexto educativo. Y cuestiones de método:

- Enfoque genético ('construir' un *modelo* desde $\mathbf{Q}$) antes que axiomático
- Caracterizar la continuidad o completitud

Profundizar en los tipos de irracionales (infinitos números transcendentales)

Conexión íntima entre los irracionales y el infinito actual:

- Cantor en 1887: "Se puede decir incondicionalmente: los números transfinitos se *sostienen* o *caen* junto con los números irracionales finitos;"



D. Hilbert:

“Se trata finalmente de que, si no me equivoco, el desarrollo moderno de la matemática pura se está produciendo principalmente *bajo el signo del número* [*unter dem Zeichen der Zahl*]: las definiciones de Dedekind y Weierstrass de los conceptos aritméticos básicos y las construcciones numéricas generales de Cantor conducen a una *aritmetización de la teoría de funciones*, y sirven para implementar el principio de que, incluso en la teoría de funciones, un hecho solo se considera probado cuando finalmente se ha reducido a relaciones entre números racionales enteros.” (1897 *Zahlbericht*)

“La *aritmetización de la geometría* se está llevando a cabo mediante las investigaciones modernas en geometría no euclidiana, que implican una construcción estrictamente lógica de la misma, y la introducción del número en la geometría, de forma lo más directa y coherente que sea posible.”

G. Cantor 2020. *Obra matemática* (ed. C. Gómez). RSME y UAC.

L. Corry 2021. *Breve historia de los números*. RSME y ed. SM.

R. Dedekind 2014. 'Continuidad y números irracionales', en *¿Qué son y para qué sirven los números?* (ed. J. Ferreirós). UAM y Alianza ed.

H. H. Ebbinghaus et al. 1990. *Numbers*. Springer (Graduate texts in math).

J. Ferreirós 2007. 'The real number system', en *Labyrinth of Thought: a history of set theory*. Birkhäuser.

---- 2015. 'Mathematics developed: the real numbers', en *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton UP.

J. Stillwell y muchos más...



Gracias, moitas grazas



Gauss: “Pero las magnitudes imaginarias, que se contraponen a las reales — antiguamente, y en ocasiones ahora también, llamadas *imposibles*, aunque inapropiadamente— están menos admitidas que meramente toleradas, y así aparecen más bien como un juego de símbolos vacío en sí mismo, al que se niega incondicionalmente un sustrato concebible, sin querer, no obstante, desdeñar el rico tributo que ese juego de símbolos aporta en último término al tesoro de las relaciones de las magnitudes reales.” (1831)

C. F. Gauss: “El verdadero sentido de $\sqrt{-1}$ lo tengo ante el alma con gran viveza, pero sería difícil expresarlo en palabras, que sólo pueden dar una imagen vaga, como flotando en el aire.”