

UIMP

Universidad
Internacional
Menéndez Pelayo



**1ª ESCUELA DE VERANO CEMAT
EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS:**
estudio, aplicaciones y enseñanza

A CORUÑA, del 8-10 octubre 2025
Fundación Luis Seoane-UIMP



N y L



Luis Español González
luis.espanol@unirioja.es



**Dos caminos para el cálculo infinitesimal:
el insular de Newton y
el continental de Leibniz**

Dos anastomosis en el siglo XVII

Geometría analítica y Cálculo infinitesimal

¿Cuál es la esencia de la investigación matemática? ¿Cómo se amplía sin cesar el patrimonio de esta ciencia? No incurriremos en la pretensión de contestar a estas preguntas, pero permítasenos señalar siquiera cuatro caminos cardinales que podemos designar así: anastomosis, correlación, generalización, especialización. [...]

Los progresos esenciales de la ciencia corresponden a la feliz cópula de dos conceptos que parecían lejanos e independientes, y al librarlos de su envoltura formal descubren tal identidad de substancia, que se anastomasan y hasta se funden en uno solo. La Geometría analítica de Cartesio, origen de la Matemática moderna, realizó brillantemente esta anastomosis del Álgebra con la Geometría. [25, p. 97]

Julio Rey Pastor: «La investigación científica»,
Supl. Rev. Mat. Hispano-Americana 1, 1919.

El Cálculo infinitesimal anastomosa

Cálculo de tangentes / Cálculo de áreas

Cálculo diferencial

/

Cálculo integral

I

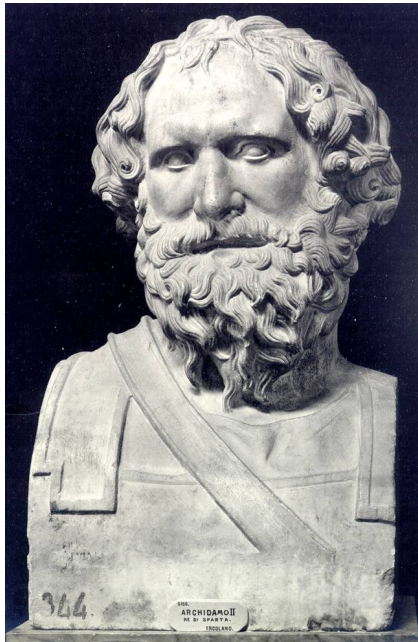
ARQUÍMEDES y lo infinitesimal

II

**SEGUIDORES EN EL SIGLO XVII:
EXPERIMENTADORES**

III

INVENTORES

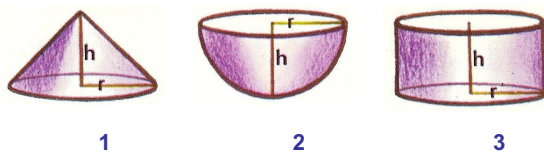


I

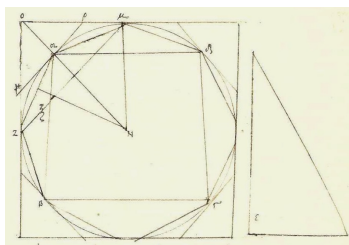
ARQUÍMEDES y lo infinitesimal

El cálculo infinitesimal es la evolución de la obra de Arquímedes aplazada al siglo XVII

Sobre la esfera y el cilindro I y II



Medida del círculo

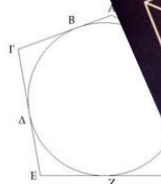


Cuadratura de la parábola

SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO - I

9

[17] **S** e circunscribe un polígono a un círculo, el perímetro del polígono es mayor que el perímetro del círculo.²⁸
Circunscríbese al círculo el polígono supuesto.
Digo que el perímetro del polígono es mayor que el perímetro del círculo.



Puesto que la suma de BAA es mayor que el arco de círculo que comprende el arco de circunferencia que tiene los mismos extremos, la suma de $\Delta\Gamma$, $\Gamma\Theta$ es mayor que el arco $\Delta\Theta$, y la suma de $\Lambda\Theta$, $\Theta\Xi$ es mayor que el arco $\Lambda\Xi$, y así sucesivamente, la suma de $\Xi\Theta$ es mayor que el arco $\Xi\Theta$, y también la suma de $\Delta\Xi$, $\Xi\Theta$, $\Theta\Lambda$, entonces el perímetro entero del polígono es mayor que el perímetro del círculo.

[2] **D** adas dos magnitudes desiguales es posible hallar dos rectas desiguales que la recta mayor guarde con la menor una razón menor que la mayor con la menor.²⁹

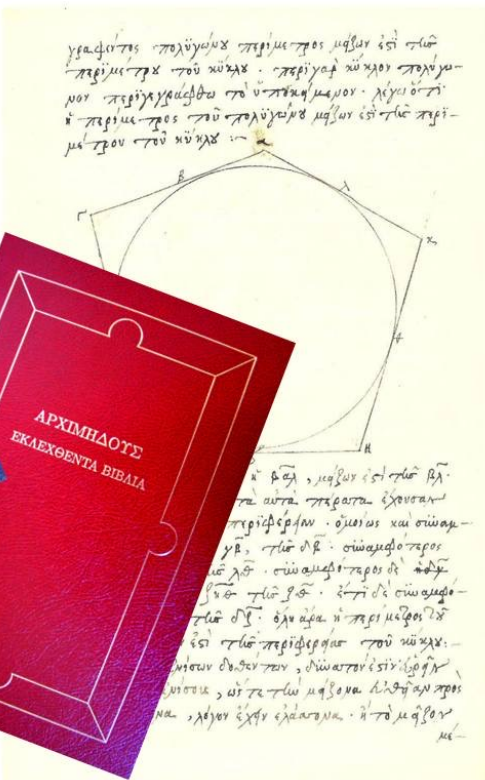
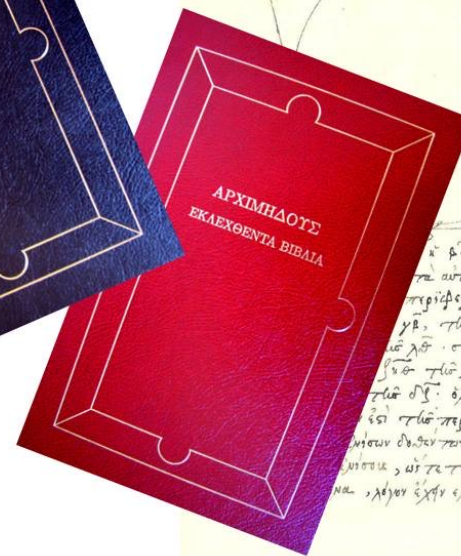
razón» han sido entendidas de muy diversas formas, hasta el punto de que [Dijksterhuis, 1985] grandes diferencias entre las diversas traducciones de diversas ediciones - la Edición Pappi, Heath, Ver Eecke - La discusión se remonta [Dijksterhuis, 1985: 147-149] con la interpretación habitual que el postulado de Arquímedes es una extensión del principio atribuido a Eudoxo y conocido hoy en el sentido siguiente: «si dos magnitudes satisfacen el axioma de Eudoxo una respecto a la otra, su diferencia satisface ese postulado respecto a cualquier magnitud de la misma especie homóloga a ambas». Dijksterhuis insiste en que la misión del postulado es reducir de la geometría griega la suma de infinitesimales actuales, y tendría la importante función de discriminar la rigurosa aplicación de la teoría del cálculo infinitesimal de la práctica de otros métodos muy utilizados en la época, tales como las herramientas heurísticas, pero poco rigurosas geométricamente, tales como los métodos de indivisibles, ya presentados y casi perseguidos en el atomismo geométrico de Demócrito [González Urbaneja y Vagstad, 1993: 132], utilizados, asimismo, por el propio Arquímedes de una forma tan brillante y diligente en su método mecánico de investigación [González Urbaneja y Vagstad, 1993: 38-124, 167-172] y que aplicados por Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat y demás eximios matemáticos del siglo XVII, produjeron la subterránea explosión de multitud de técnicas infinitesimales que inundaron el panorama científico y condujeron al inabarcable alumbramiento del cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz [González Urbaneja, 1992: 69-140], [Durán, 1996: 109-122], [Boyer, 1949: 96-196], [Grattan-Guinness, 1984: 49-66], [Edwards, 1979: 98-121].

²⁸Así como los postulados con un aserto acerca de que «el perímetro de un polígono inscrito en un círculo es menor que la circunferencia del círculo», una especie de Lema o Proposición como la designa Cuesta Dutari [Cuesta, 1985: 19].

²⁹La Proposición 1 completa los asertos de la parte axiomática.

³⁰Este resultado es citado por Pappus en la Proposición 2 del Libro V - dedicado a las propiedades comparativas de las figuras planas isoperimétricas - de la Colección matemática [Pappus, I, 1982: 242].

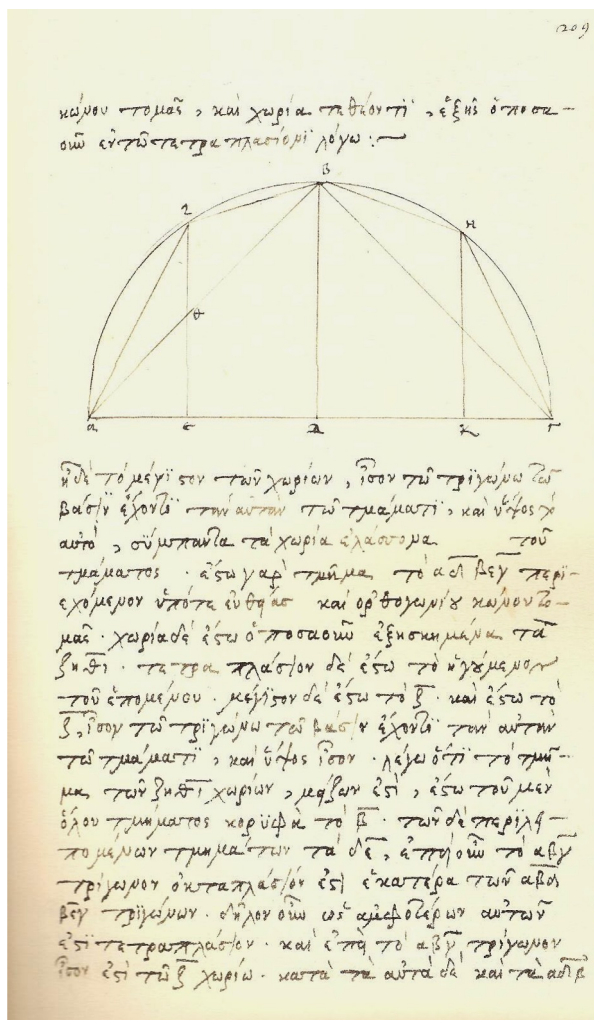
³¹Esta proposición viene a ser un teorema sobre la estructura de orden de la recta real, y sobre las razones - es decir, números reales - entre los segmentos rectilíneos.



Arquímedes. Obra escogida. ICM Madrid 2006

RSME / Patrimonio Nacional

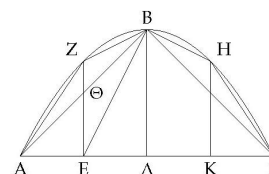
A. J. Durán (ed.) LaTeX de J. L. Varona



es posible inscribir un polígono, de manera que los segmentos restantes¹²⁸ sean inferiores a toda área dada. Pues, sustrayendo siempre una área que, de acuerdo con esta proposición,* es mayor que la mitad, es evidente que, disminuyendo siempre los segmentos restantes, los haremos inferiores a toda área dada.¹²⁹

*Proposición 20 anterior.

/21/ Si en un segmento comprendido por una recta y una parábola se inscribe un triángulo con la misma base que el segmento y la misma altura, y se inscriben también en los demás segmentos otros triángulos que tengan la misma base que los segmentos y la misma altura, el triángulo inscrito en todo el segmento será óctuple de cada uno de los dos triángulos inscritos en los segmentos restantes. [208 v.]



N. de A.D.: Sobre lo dibujado por el copista del X-14 véase el recto del folio 209-, se ha añadido al diagrama el segmento EB -tampoco está en el códice E ni en otros de la familia A-, pero aparece implícito en el texto de la proposición al considerar los triángulos AEB y ΘBE -Heiberg también lo incluye.

Sea el segmento ABΓ tal y como se ha dicho y divídase AΓ por la mitad en Δ; trácese BA paralela al diámetro. Entonces el punto B es el vértice del segmento.¹ Luego el triángulo ABΓ tiene la misma base que el segmento y la misma altura. De nuevo divídase por la mitad AΔ por E y trácese EZ paralela al diámetro y divídase AB por Θ. Entonces el punto Z es vértice del segmento AZB.¹³⁰ Por tanto, el triángulo AZB tiene la misma base que el segmento AZB y la misma altura. Se ha de demostrar que el triángulo ABΓ es igual al óctuple del triángulo AZB.

Así pues, BA es cuatro tercios de EZ¹ y doble de EΘ.¹³¹ Entonces EΘ es igual al doble de ΘZ.¹³¹ De manera que el triángulo AEB es igual al doble de ZBA, pues el triángulo AEΘ es igual al doble de AΘZ y ΘBE , igual al doble de ZΘB.¹³² De manera que ABΓ es igual al óctuple de AZB.¹³³ Y del mismo modo se demostrará también que es óctuple del triángulo inscrito en el segmento BHT.

¹Proposición 18.

¹³⁰Proposición 19.

¹³¹Elementos VI.2.

/22/ Si hay un segmento comprendido por una recta y una parábola, se ponen cuantas áreas se quiera en una serie de razón cuatro¹³⁴ y es la mayor de las áreas igual al [209 r.]

¹²⁸N. de S.M.: «Restantes» (περιλειπόμενα) se lee en B y en G. En cambio, aquí (EH) se lee περιεπόμενα, que no da buen sentido.

¹²⁹Principio de Eudoxo (Elementos X.1). Véanse las notas 33 y 68 de EC. I sobre la aplicación de esta importante proposición.

¹³⁰Por semejanza de triángulos (Elementos VI.2) se tiene $A\Theta = \Theta B$, ya que $AE = E\Delta$. Por tanto, la recta ΘZ pasa por la mitad de AB y, al ser paralela al diámetro del segmento ABΓ, es el diámetro del segmento AZB, luego (Proposición 18) Z es el vértice.

¹³¹Acabamos de ver que $B\Delta = (4/3)EZ$ y $B\Delta = 2E\Theta$. Por tanto, $E\Theta = (2/3)EZ = (2/3)(E\Theta + \Theta Z)$, de donde resulta $E\Theta = 2\Theta Z$.

¹³²Los triángulos AΘZ, AEΘ tienen la misma altura y sus bases son ΘZ y $E\Theta = 2\Theta Z$, luego (Elementos VI.1) el triángulo AEΘ es doble del AΘZ. Los triángulos ZΘB y ΘBE tienen la misma altura y sus bases son ΘZ y $E\Theta = 2\Theta Z$, luego (Elementos VI.1) el triángulo ΘBE es doble del ZΘB. Ahora bien, el triángulo AEB se compone de la suma de los triángulos AEΘ y ΘBE ; y el triángulo ZBA se compone de la suma de los triángulos AΘZ y ZΘB. Por tanto, el triángulo AEB es el doble del triángulo ZBA.

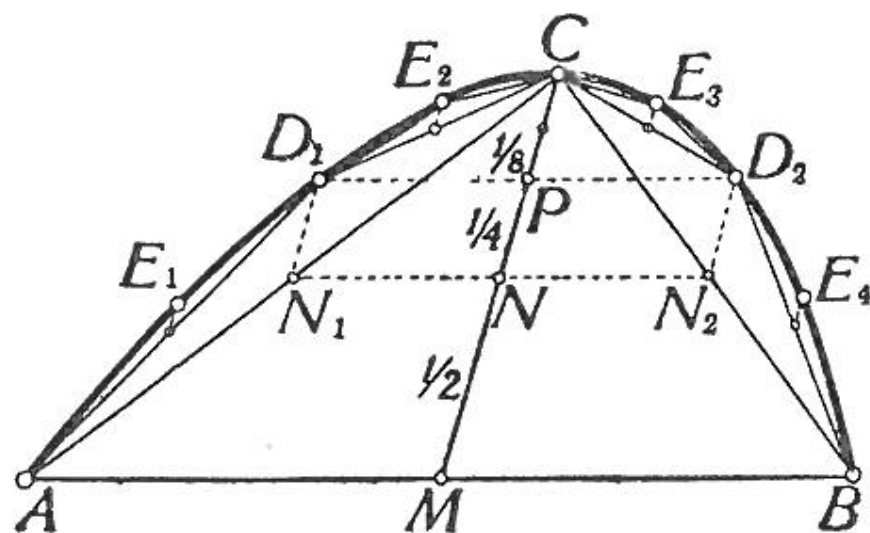
¹³³De Elementos VI.1 se tiene triángulo ABΓ = 2 triángulo ABA = 4 triángulo AEB. Por tanto, a partir de la nota anterior resulta triángulo ABΓ = 8 triángulo AZB. De la misma forma se comprueba que triángulo ABΓ = 8 triángulo BHT.

¹³⁴Como apunta la demostración, la expresión «en una serie de razón cuatro» debe entenderse «en progresión geométrica decreciente de razón $1/4$ ».

La herencia de Arquímedes

Cuadratura de la parábola

Tanto estos precursores, como el propio Arquímedes (-287 -212) en su famosa cuadratura de la parábola, no utilizan el método que hoy llamaríamos de la *integral*, sino el método de *exhaución*, que consiste en descomponer la figura en una serie convergente de trozos y la suma de la serie de medidas de ellos da la extensión de la figura total. Así p. ej. la simple inspección de la figura indica claramente cómo llega Arquímedes a la serie geométrica:



$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{4}{3}$$

Esta es la primera serie convergente que aparece en la Historia, y Arquímedes logró calcular su suma tomando como unidad el área del triángulo **A B C**.

Su mérito sobresaliente es el de haber establecido además los fundamentos del Cálculo integral, con otro método de cuadratura de la parábola que no figura en la gran Historia de Cantor y que equivale en esencia al cálculo de la integral de x^2 .

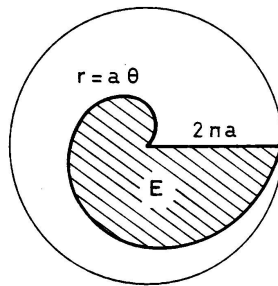
Julio Rey Pastor: **Evolución del cálculo infinitesimal**

Apéndice a su libro *Cálculo Infinitesimal*, BsAs, 1921 (3ª ed. 1938)

La herencia de Arquímedes

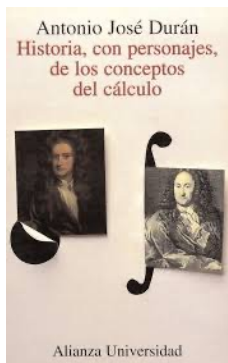
Sobre la espiral / área

$$E = (1/3) C$$



Argumentos infinitesimales

«Integración en polares»



A. J. Durán.
*Historia, con personajes,
 de los conceptos del cálculo*
 Alianza, Madrid, 1994

Otro ejemplo del método de las sumas integrales es la determinación del área de la primera espira de la espiral de Arquímedes: $\rho = \varphi$. La espiral se introduce cinemáticamente como trayectoria de un punto, sometido a dos

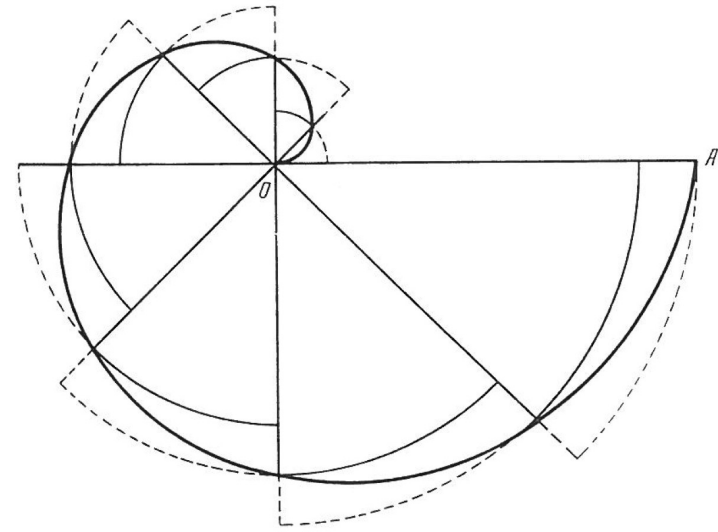


Fig. 18

movimientos uniformes: un giro del rayo alrededor del punto y un movimiento del punto a lo largo del rayo desde el centro (fig. 18). Para la determinación del área de la primera espira, se divide la circunferencia ($r = a$)

en n partes. A continuación se construyen dos sucesiones de sectores circulares inscritos y circunscritos, cuyos radios son $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{na}{n} = a$.

Sus áreas: $S_k = \frac{\pi r_k^2}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Estas sucesiones forman figuras inscritas y circunscritas, el área de las cuales es respectivamente mayor y menor que el área de la espira de la espiral:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{ka}{n} \right)^2 < S < \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{ka}{n} \right)^2, \quad \text{ó}$$

$$\frac{\pi a^2}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < S < \frac{\pi a^2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Sobre la base de las estimaciones citadas en el ejemplo anterior,

$$V_{\text{ins}} < \frac{\pi a^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^2}{3}, \quad \text{y además } V_{\text{cir}} > \frac{\pi a^2}{3}.$$

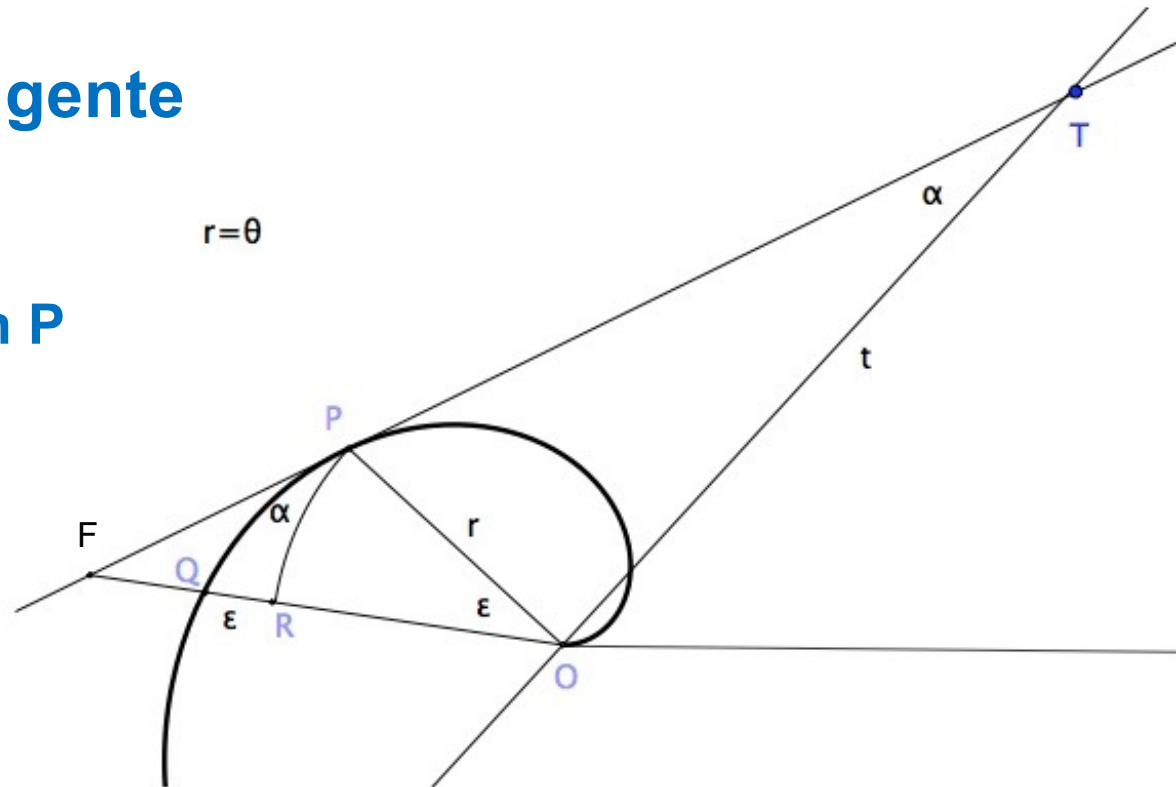
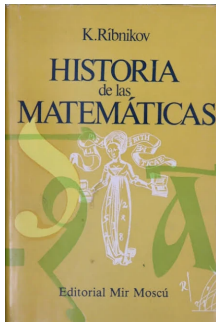
Pero la diferencia entre las sumas que aproximan puede ser hecha tan pequeña como se quiera. Por consiguiente $S = \frac{\pi a^2}{3}$.

La herencia de Arquímedes

Sobre la espiral / tangente

Trazado de la tangente en P

K. Ríbnikov
Historia de las matemáticas
Ed. Mir, Moscú, 1987



Determinar T [$t = OT$] en la perpendicular del radio vector.

$$t = r^2$$

Si ϵ es muy pequeño [infinitesimal]

se puede tomar $PFR \sim PTO$, luego $r\epsilon : \epsilon :: t : r$

OT es la **rectificación** del arco circular dado por las coordenadas (polares) de P

Arquímedes triseca un ángulo con la espiral

II

SEGUIDORES EN EL SIGLO XVII: EXPERIMENTADORES



Cavalieri, Mengoli



Roberval



Fermat, Pascal



Huygens



Wallis, Barrow



Nuevas matemáticas en la Europa del siglo XVII

Comienzan los estudios cinemáticos

Aparecen los logaritmos [números decimales]

Auge de algoritmos infinitos

Termina el proceso de «algebrización»

Geometría analítica

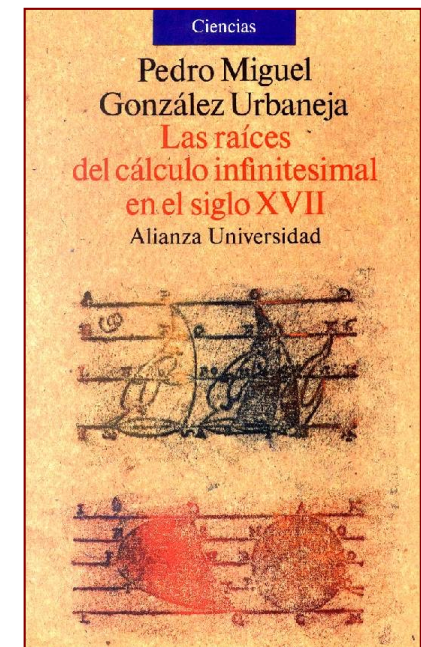
Sociedades nacionales y revistas

Se acumula experiencia con los métodos de Arquímedes para áreas y tangentes

Desfases entre creación y publicación

Vías de comunicación insuficientes

Con o sin geometría analítica



Alianza, 1992

Elenco de experimentadores con los infinitésimos

Continental

Italia: Cavalieri, Torricelli, Mengoli

Francia: Fermat, Roberval, Pascal

Países Bajos: Huygens

Insulares

Wallis, Barrow, Gregory

Descartes 1596–1650

Cavalieri 1598–1647

Fermat 1601–1665

Roberval 1602–1675

Torricelli 1608–1647

Wallis 1616–1703

Pascal 1623–1651

Mengoli 1626–1686

Huygens 1629–1695

Barrow 1630–1677

Gregory 1638–1676

Newton 1643–1727

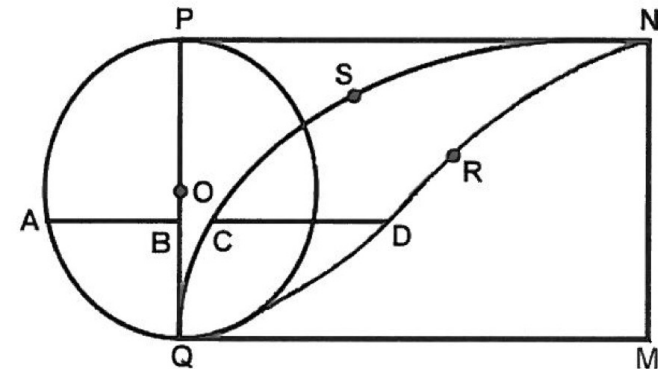
Leibniz 1646–1716

Indivisibles de Cavalieri

CAVALIERI 1635, *Geometría de los indivisibles*. Obtiene que el área bajo las parábolas mediante su método original de «suma de líneas».

ROBERVAL, c. 1637, que el área bajo un arco de la cicloide es igual a 3 veces el área del círculo generador.

Obtuvo la tangente por método cinemático de composición de velocidades.



MENGOLI fue discípulo de Cavalieri. Trabajó con indivisibles y con otros métodos propios, logrando entre 1650 y 1672 importantes resultados sobre sumación de series y cuadraturas, incluida la del círculo. Estudia convergencia de series. Comparte resultados con otros autores. Publicó en libros que no ejercieron influencia,

Especialista sobre Mengoli es María Rosa Massa Esteve

Nicolaus MERCATOR (1620-1687), publicó *Logarithmotechnia* en 1668.

Área bajo parábolas

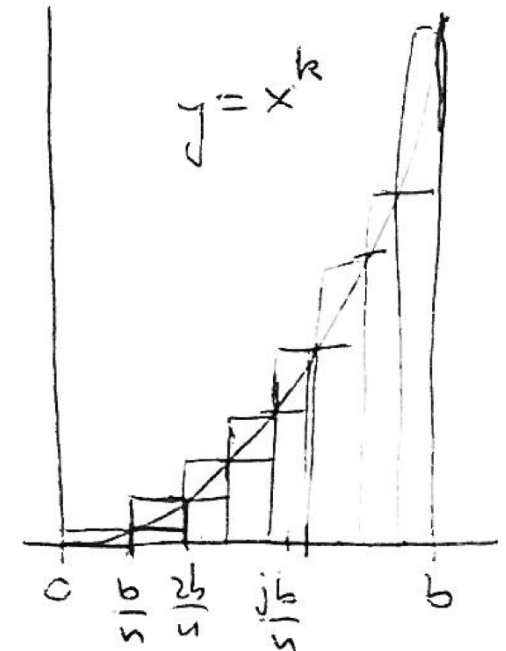
FERMAT 1636, *Carta a Roberval*. encaja el área bajo la parábola $y=x^k$ entre sumas de rectángulos por defecto y por exceso sobre una partición de $[0,b]$ en n partes iguales y de allí obtiene el área bajo la parábola.

$$\frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \dots + n^k) < \frac{b^{k+1}}{k+1} < \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \dots + (n+1)^k).$$

También para hipérbolas con exponente distinto de -1.
Partición en progresión geométrica

WALLIS 1656, *Arithmetica Infinitorum*. Toma la misma partición que Fermat y calcula la razón del área bajo la parábola a la del rectángulo de base b y altura b^k .

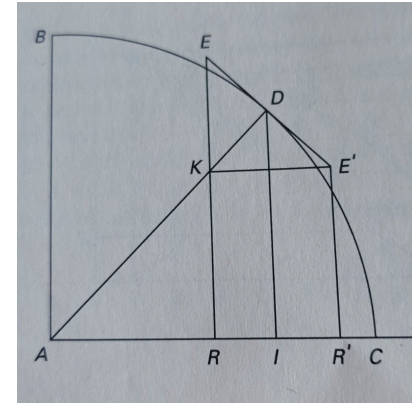
$$\frac{\text{par}}{\text{rec}} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \dots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$



Otras áreas

PASCAL 1659.

Tratado de los senos de los cuadrantes circulares.



Calcula el área bajo la curva seno usando el «triángulo característico» considerando que «Para pequeños triángulos se puede sustituir el arco de curva por la tangente».

Obtiene:

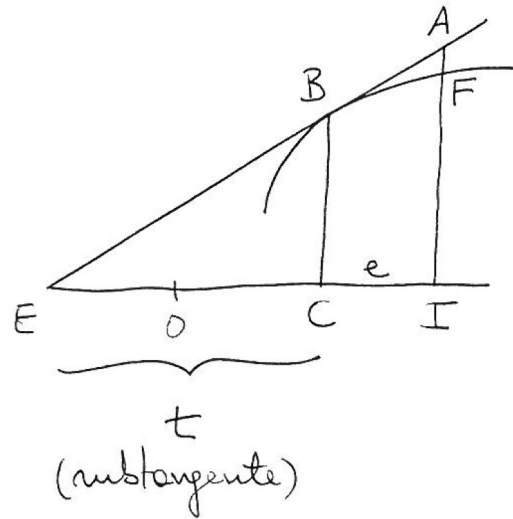
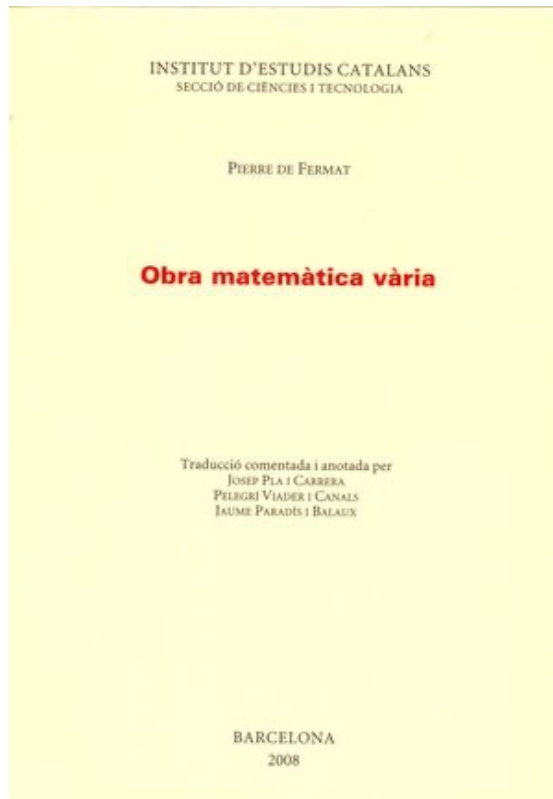
«La suma de los senos de cualquier arco del cuadrante es igual a la porción de la base entre los senos extremos, multiplicada por el radio.»

$$\int_{\alpha}^{\beta} r \operatorname{sen} \theta d(r\theta) = r(r \cos \theta - r \cos \beta), \quad [\alpha < \beta]$$

FERMAT, 1638

Trazado de tangentes

Se expresaba en el lenguaje de Vieta



$$\text{semejanza: } \frac{AI}{BC} = \frac{EI}{EC}$$

Si CI pequeño, es "despreciado"

$$\frac{FI}{BC} = \frac{EI}{EC}$$

$$\frac{f(x+e)}{f(x)} = \frac{t+e}{t}$$

$$(*) \quad t f(x+e) = (t+e) f(x)$$

A partir de (*) se relaciona t con x operando:

- cancelar términos
- dividir por e
- hacer $e=0$

$$\text{ej: } y = x^2; \quad t(x+e)^2 = (t+e)x^2$$

$$2tx + te^2 = x^2$$

$$2tx = x^2$$

$$\text{luego } t = \frac{x}{2}$$

Fermat no inventó el cálculo

Side Bar 12.2 Did Fermat Invent the Calculus?

By the mid-1640s Fermat had determined the area under any curve of the form $y = x^k$ (except, of course, $y = x^{-1}$, a curve for which Fermat realized his method did not apply) and also had been able to construct the tangent to such a curve. Since he had solved the two major problems of the calculus, at least in these significant special cases, why should he not be considered as the inventor of the calculus? The answer must be that Fermat did not realize the inverse relationship between the two problems and therefore could not apply results on tangents to calculate results on areas. A student today, seeing that the derivative of $y = x^k$ was $y' = kx^{k-1}$ and also that the area under $y = x^k$ from 0 to x was $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ would probably immediately recognize this inverse property. Fermat did not, because he was not asking the questions which would lead him to it. For Fermat, construction of a tangent meant exactly that: find the length of the subtangent

and then draw the line from the point on the curve to the appropriate point on the axis. Thus, he did not generally consider the slope of the tangent line, what we call the derivative. In dealing with $y = x^k$, he would find that the subtangent t equaled x/k rather than that the slope of the tangent equaled kx^{k-1} . Similarly, to find an area under a curve meant for Fermat to find a suitable rectangle equal in area to the given curvilinear region. In other words, the area under $y = x^k$ from 0 to x_0 equaled the area of the rectangle whose width was x_0 and whose height was $\frac{1}{k+1}y_0$. He never considered the area from a fixed coordinate to a variable one as determining a function, expressible as a new curve. Thus, although Fermat was able to solve the two basic problems of the calculus in many instances, he did not ask the “right” questions. It was others who were able to see what Fermat missed.

Barrow tampoco

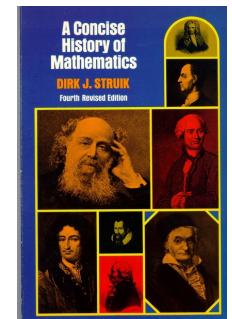
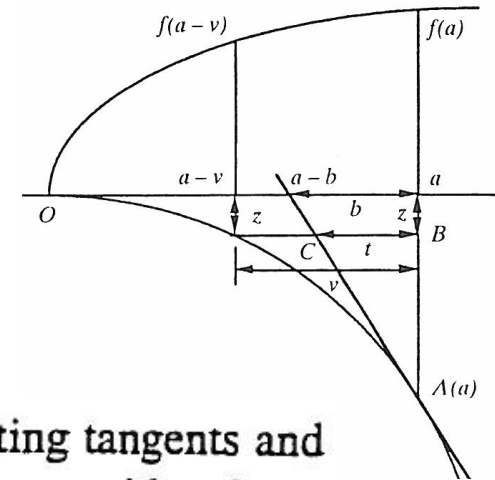
Es el que más cerca estuvo en 1670. *Lectiones geometricae*.

Given that Barrow knew the algebraic procedures for calculating tangents and areas and was also aware of the fundamental theorem, should he be considered one of the inventors of the calculus? The answer must be no. Barrow presented all of his work in a classic geometric form. It does not appear that he was aware of the fundamental nature of the two theorems presented in the text. Barrow does not mention that they are particularly important. They are presented as two among many geometrical results dealing with tangents and areas. And Barrow never uses them to calculate areas. Perhaps if Newton had not come along, Barrow would have seen the uses to which these theorems could be put. But because he realized that Newton's abilities outshone his own, and because he was more concerned with pursuing theological interests, Barrow abandoned the study of mathematics to his younger colleague and left to him the invention of the calculus. [Katz]

GREGORY 1668, *Geometriae pars universalis*.

«Si hubiera vivido podría haberse equiparado con Newton y Leibniz como un inventor del cálculo.»

D. J. Struik, *A concise history of mathematics*, Dover, 1987



III

INVENTORES

NEWTON Y LEIBNIZ





NEWTON Y LEIBNIZ



Side Bar 12.4 Newton, Leibniz, and the Invention of the Calculus

Newton and Leibniz are considered the inventors of the calculus, rather than Fermat or Barrow or someone else, because they accomplished four tasks. They each developed general concepts, for Newton the fluxion and fluent, for Leibniz the differential and integral, which were related to the two basic problems of calculus, extrema and area. They developed notations and algorithms which allowed the easy use of these concepts. They understood and applied the inverse relationship of their two concepts. Finally, they used these two concepts in the solution of many difficult and previously unsolvable problems. What neither did, however, was establish their methods with the rigor of classical Greek geometry, because both in fact used infinitesimal quantities.



Isaac NEWTON
(1643–1727)

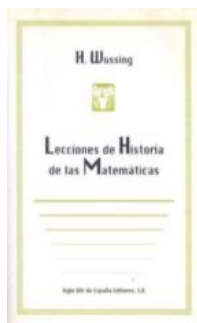


Ilustración en H. Wussing:
Lecciones de historia de las matemáticas. Siglo XXI, 1998

Obra de 1671 sin publicar hasta 1736.

La toma Katz toma como guión para explicar el cálculo de Newton:

Series de potencias

Fluxiones y aplicaciones

Cálculo de áreas

Tampoco publicó en su momento una obra en 1966 y otra en 1969, *De analysis per aequationes numero terminorum infinitas*
 Publicada en 1711

Estas obras recogen investigaciones realizados durante los años 60.

THE METHOD of FLUXIONS AND INFINITE SERIES;

WITH ITS
 Application to the Geometry of CURVE-LINES.

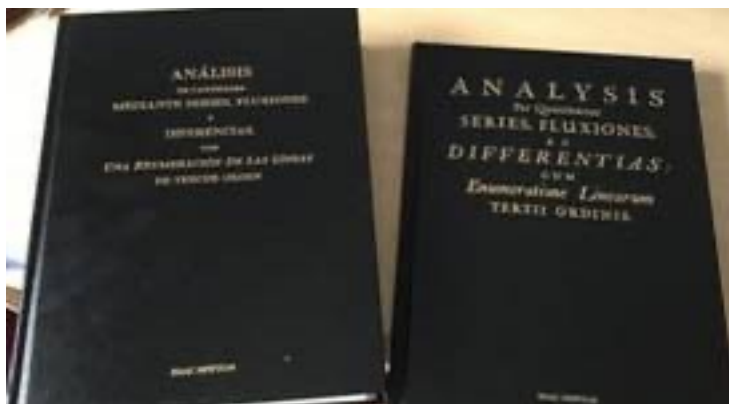
By the INVENTOR
 Sir ISAAC NEWTON, K^t.
 Late President of the Royal Society.

*Translated from the AUTHOR'S LATIN ORIGINAL
 not yet made public.*

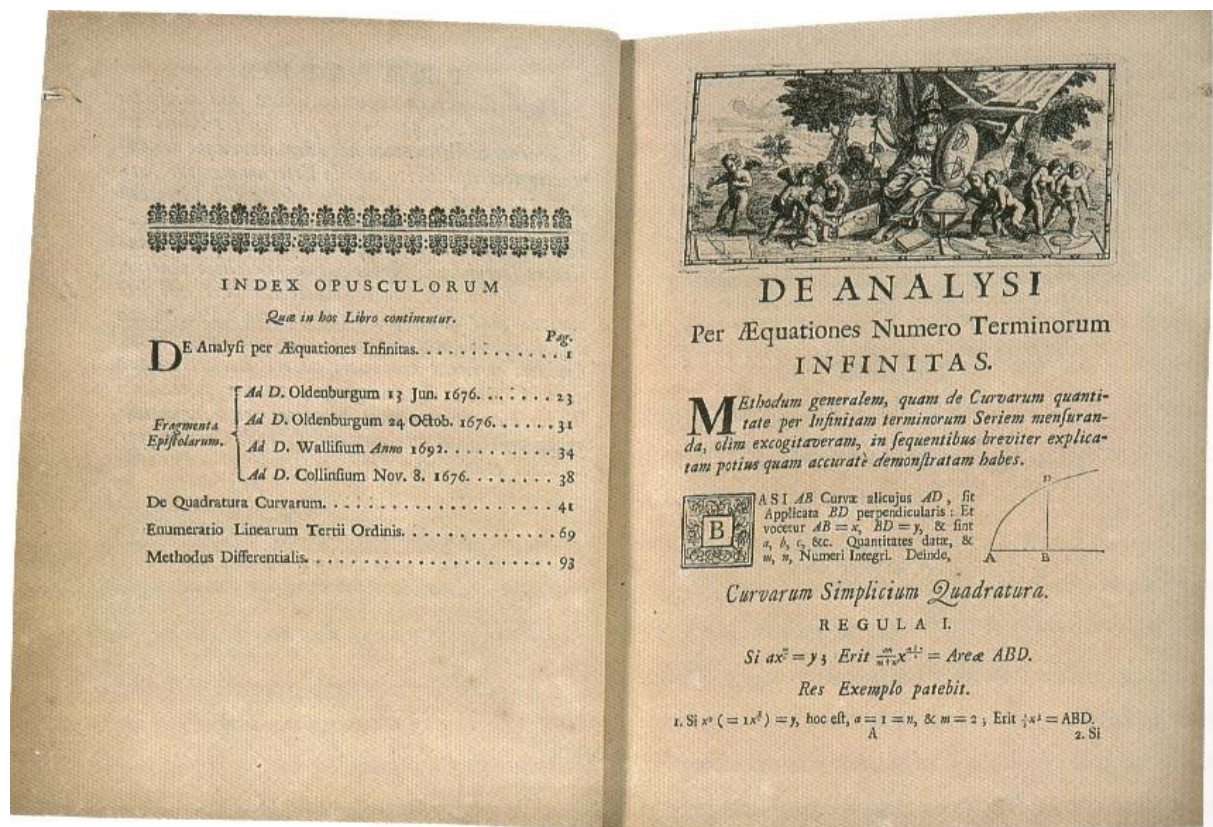
To which is added,
 A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
 Consisting of
 ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
 In order to make this Treatise
A compleat Institution for the use of LEARNERS.

By JOHN COLSON, M.A. and F.R.S.
 Master of Sir Joseph Williamson's free Mathematical-School at Ratchester.

L O N D O N :
 Printed by HENRY WOODFALL;
 And Sold by JOHN Nourse, at the Lane without Temple-Bar.
 M.DCC.XXXVI.



Publicado por la RSME y la
SAEM «Thales»,
en colaboración con el ROA



Edición facsimilar, crítica y traducida del *Analysis...* de Newton, a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez Fernández (Dos volúmenes en estuche. Edición numerada).

I: Reproducción facsimilar de *Analysis...*

II: Traducción de J. L. Arántegui, Notas y comentarios a cargo de A. J. Durán

Estudios: J. M. Sánchez Ron, sobre Newton

A. J. Durán, sobre la obra

J. Echeverría, sobre la controversia

NEWTON y las series de potencias

Extensión de operaciones aritméticas

Las operaciones con números que producen expresiones decimales infinitas se repiten por analogía con los polinomios y dan series de potencias

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \dots$$

$$y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0 \quad y = a - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{1638a^4} + \dots$$

Serie binomial: La obtiene inspirado en Wallis.

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n, \quad \text{con } \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$$

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \dots$$

Serie del logaritmo: Mercator la publicó en 1668. La obtuvieron Mengoli y Gregory.
Vinculada al área bajo la hipérbola equilátera (St. Vicent, Sarasa)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Series exponencial y trigonométricas: A partir de las anteriores con las fluxiones.

NEWTON y las fluxiones

Cada cantidad variable x o *fluente* varía o *fluye* con el tiempo, con una velocidad $\dot{x}$ o *fluxión*.

Tras un intervalo de tiempo o (que resultará «evanescente») la cantidad variable x tendrá en el instante $t + o$ el valor (o posición) $x + \dot{x}o$, con un incremento $\dot{x}o$ llamado *momento* (que también resultará «evanescente»).

El tiempo t verifica $\dot{t} = 1$ (o es el momento de t).

Newton se plantea dos problemas inversos con dos fluentes que fluyen ligadas por una relación o ecuación:

1. Dada una relación entre fluentes encontrar la relación entre sus fluxiones.
2. Dada una relación entre fluxiones encontrar la relación entre sus fluentes.

Lenguaje actual: el problema 1 es derivar y el 2 es integrar

Problema 1

Para resolver el Problema 1 Newton elabora un *álgebra para o*:

1. Se puede dividir por o .
2. Cuando oo opera junto a o puede despreciarse.
3. Cuando solo queda o puede despreciarse.

Ejemplo $y = x^3$: $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^3 = x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2oo + \dot{x}^3ooo$.
Simplificando: $\dot{y}o = 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2oo + \dot{x}^3ooo$. Aplicando álgebra de o :

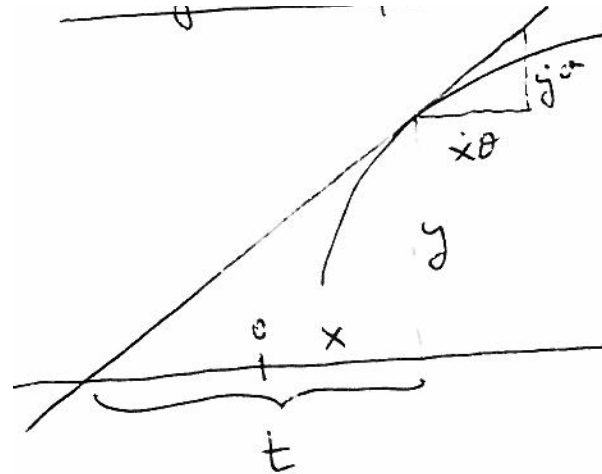
1. Se dividir por o : $\dot{y} = 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3oo$.
2. Cuando oo opera junto a o se desprecia: $\dot{y} = 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o$.
3. Cuando solo que da o se desprecia: $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$.

En general: Con $y = x^n$ da $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. El ejemplo de Newton:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0, \quad (3x^2 - 2ax + ay)\dot{x} + (ax - 3y^2)\dot{y} = 0.$$

**Con las reglas de la suma y el producto el cálculo de fluxiones
se extiende a polinomios y series de potencias**

Tangente y Curvatura



Según la costumbre de la época, la tangente a $y = f(x)$ se determina calculando el segmento *subtangente* $\mathbf{t}$.

El coeficiente angular de la tangente es $u = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Por semejanza con el triángulo infinitesimal se verifica

$$\frac{y}{\mathbf{t}} = \frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = u, \quad \mathbf{t} = \frac{y}{u}$$

Para Newton, el radio de curvatura ρ es el radio de la menor circunferencia tangente a la cura, lo calcula (como Huygens y Gregory) por el método de punto de intersección de la normal con otra «muy próxima». El resultado es

$$\rho = \frac{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{u}}$$

NEWTON

Método de fluxiones y series infinitas (1671/1736)

Con las fluxiones resuelve cuestiones de geometría de curvas::

Inscribir el mayor rectángulo en un segmento de curva dado.

Normal a una curva desde un punto.

Recta que pasa por un punto y corta a dos curvas según un segmento máximo o mínimo.

Recta que corta a una curva bajo un ángulo máximo.

Determinar vértices y anchuras máxima o mínima de curvas.

Puntos de curvas en los que la curvatura es máxima o mínima.

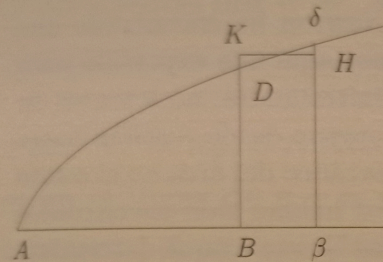
Dada una elipse, ángulo mínimo en que la ordenada corta a un diámetro.

NEWTON y las áreas

Del Análisi...,
p. 55

1. Demostración de la cuadratura de curvas simples en la regla primera

Preparación para demostrar la regla primera



Sean pues $AB = x$, base de una curva cualquiera $AD\delta$, la aplicada en perpendicular $BD = y$ y el área $ABD = z$ como antes. Sean así mismo $B\beta = o$,⁸⁹ $BK = v$, y el rectángulo $B\beta HK$ (ov), igual en espacio a $B\beta\delta D$.

Luego $A\beta = x + o$, y $A\delta\beta = z + ov$. Esto por delante, busco y a partir de la relación entre x y z asumida arbitrariamente del modo que verás

en lo que sigue.

Se asume a discreción que $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, ó $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Substituidos entonces x por $x + o(A\beta)$ y z por $z + ov(A\delta\beta)$, aparecerá (por la naturaleza de la curva)

Teorema fundamental del cálculo: El area ABD , denotada z , depende de la abscisa x y su fluxión respecto a ella es la ordenada y , es decir:

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y.$$

Después de avanzar la prueba mediante un ejemplo, lo demuestra mediante fluxiones para $z = \frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$.

NEWTON y las áreas

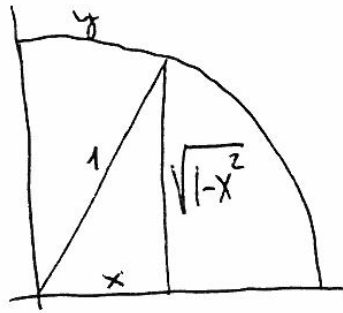
De esta prueba siguen las tres reglas para la cuadratura de las curvas mediante series infinitas:

1. Para $y = ax^{\frac{m}{n}}$ el área ABD es $z = \frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$.
2. La cuadratura es lineal (cuadrar funciones polinómicas).
3. También para series de potencias (incluso exponentes fraccionarios).

Si $\dot{x} = 1$ esto significa que $\dot{z} = y$ y para obtener z Newton procede así:

1. Expresa y en serie de potencias
2. integra término a término

Con estas reglas llega a dar una tabla de cuadraturas (primitivas).



Desarrollos trigonométricos. En la figura se representa un cuadrante de círculo de radio unidad, y es el arco del seno x , el área entre ambos es z , de manera que $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \sqrt{1-x^2}$; con $\dot{x} = 1$ y queda $\dot{z} = \sqrt{1-x^2}$, que tiene un desarrollo en serie conocido; «integrando término a término» se obtiene $z =$. Pero la geometría da las relaciones

$$z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}, \quad y = 2z - \sqrt{1-x^2},$$

de la última sigue el desarrollo del arco del seno:

$$y = [\arcsin x] = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

Newton invierte esta formula para obtener (por primera vez)

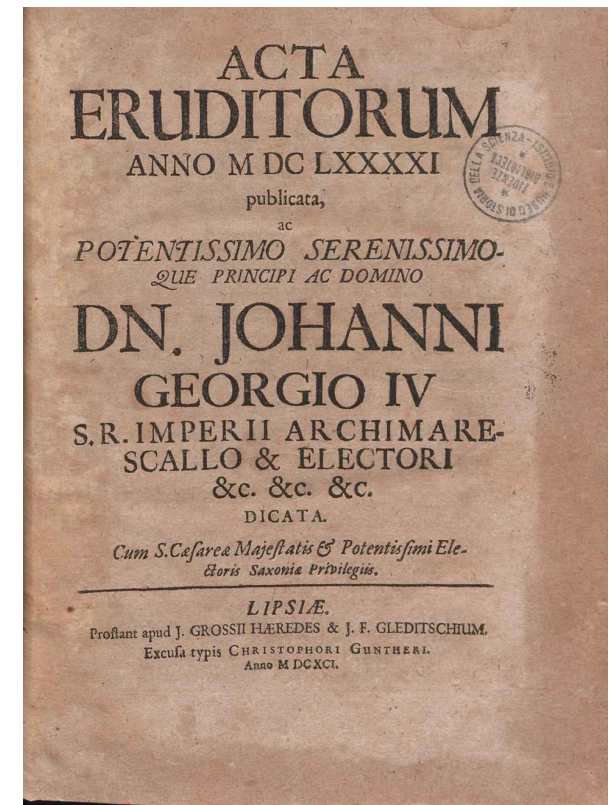
$$x = \sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{5040}y^7 + \dots$$

y de esta deduce la serie del coseno calculando $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.



Gottfried W. LEIBNIZ
(1646–1716)

LEIBNIZ aprendió matemáticas en París con **Huygens** en los años 70 y pronto empezó a publicar breves extractos de su cálculo en **Acta Eroditorum**

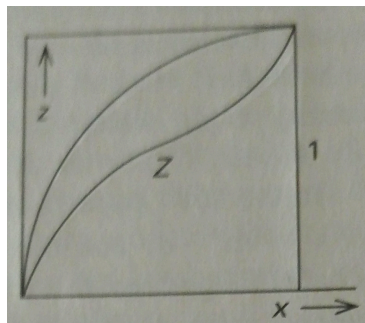
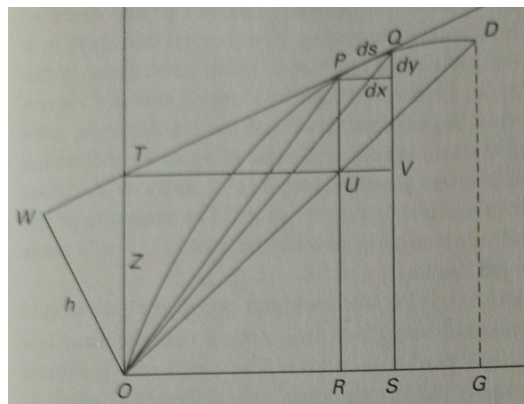


Tras la acusación de plagio a Newton, escribió en 1714 **Historia et origo calculi differentialis**

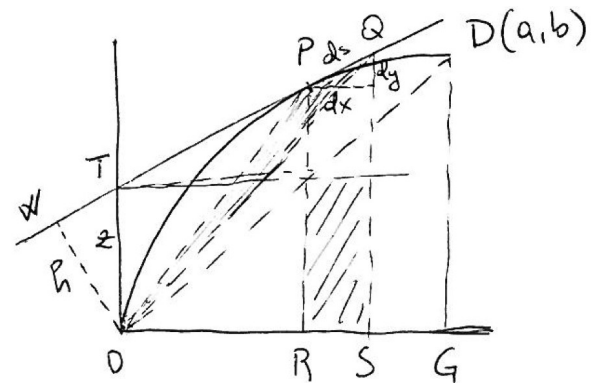


Mary Sol de Mora Charles

LEIBNIZ: la cuadratura aritmética



Teorema de transmutación



$$\int y \, dx = \frac{1}{2} (ab + \int z \, dx)$$

$\frac{ds}{dx} = \frac{z}{h}$ " $\int z \, dx = \int h \, ds$ es el área bajo la curva y sobre OD multiplicada por 2.

Ej. la circunferencia $y^2 = 2x - x^2$ da

$$\frac{\pi}{4} = \int y \, dx = \frac{1}{2} (1 + \int z \, dx)$$

viendo $z^2 = \frac{x}{2-x}$ " $x = \frac{2z^2}{1+z^2} = 2z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots)$

Pero $\int z \, dx = 1 - \int x \, dz = 1 - \int \frac{2z^2}{1+z^2} \, dz$, que se calcula integrando término a término, luego

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Newton $\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \frac{5}{704 \cdot 2^{11}} - \dots \right)$

LEIBNIZ

Lenguaje simbólico

Característica universal

Inspiración combinatoria

LEIBNIZ

La base combinatoria del teorema fundamental

Sea una variable y a la que damos una sucesión finita de valores y obtenemos sus diferencias:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \dots & \dots & \dots & \Delta_n \end{array} \quad \Delta_i = a_i - a_{i-1}$$

Se tiene $\boxed{a_n - a_0 = \sum_i \Delta_i}$

Si la sucesión de valores se hace infinita:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Sigma & \dots \dots \dots \int \quad \text{suma} \dots \text{integral} \\ \Delta & \dots \dots \dots d \quad \text{diferencia} \dots \text{diferencial} \end{array} \right.$$

pero sigue valiendo la regla general

$$\boxed{y = \int dy}$$

Tomando $\Delta_i = a_0 + \dots + a_i$ se puede repetir una sucesión de nuevos valores y sus diferencias

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{array}$$

lo que significa, pasando a infinitos valores

$$\boxed{y = d \int y}$$

Las reglas de **LEIBNIZ** para diferenciar también tienen inspiración combinatoria

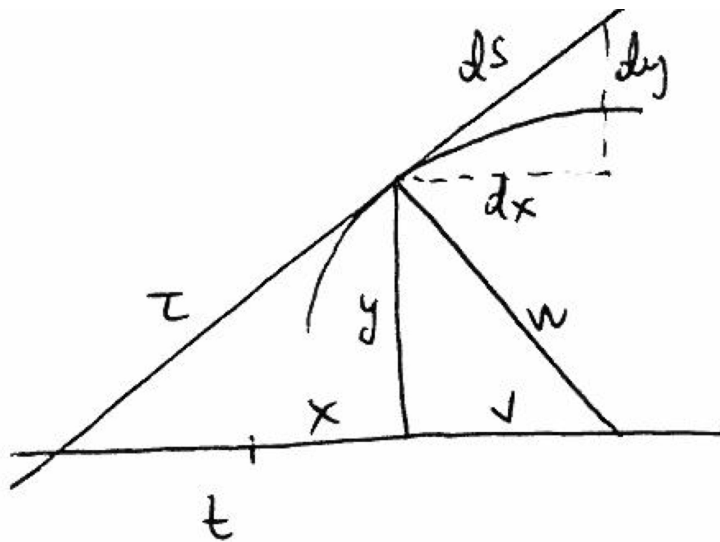
$$d(xy) = y dx + x dy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)$$

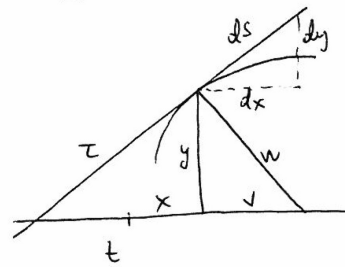
$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1} \sum_{j=1}^n x_j$$

LEIBNIZ

Solución de una ecuación diferencial lineal



LEIBNIZ



Triángulo infinitesimal (Pascal)

$$ds:dx:dy = \tau:y:t = n:v:y$$

$$t = y \frac{dx}{dy}, \quad v = y \frac{dy}{dx}$$

Problema de Debeaune (a Descartes, 1639; unresolved)

Hallar una curva $y=f(x)$ con subtangente constante $t=a$ dada.

Leibniz resuelve la ecuación diferencial $a \frac{dy}{y} = dx$ con un análisis combinatorio:

Si las diferencias dx son constantes

$$0=x_0 \quad d \quad x_1 \quad d \quad x_2 \quad d \quad x_3 \quad \dots \quad d \quad x_{n-1} \quad d \quad x_n=x$$

entonces $d = \frac{x}{n}$ y los x_i forman progresión aritmética

$$x_i = x_0 + id, \quad i=0,1,\dots,n$$

Entonces las otras diferencias serán $dy = \frac{d}{a} y$, así que darán valores y_i en progresión geométrica

$$1=y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_{n-1} \quad y_n=y$$

$$y_i = \left(1 + \frac{d}{a}\right)^i y_0, \quad i=0,1,\dots,n$$

Por tanto: $y = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^a$ (relación logarítmica)

(Nota: Si $n \rightarrow \infty$, $y = e^{x/a}$, $x = a \log y$)

Últimos comentarios

Polémica sobre prioridad

DAUBEN, J.W.: Matemáticas: la perspectiva de un historiador, *LLULL*, 16 (1993) 23-41.

Formulación sintética insular

Desarrollo analítico continental

La metafísica del cálculo

La Sociedad Analítica

FIN

**Muchas gracias
a los que me invitasteis a venir
y a los que me habeis escuchado**