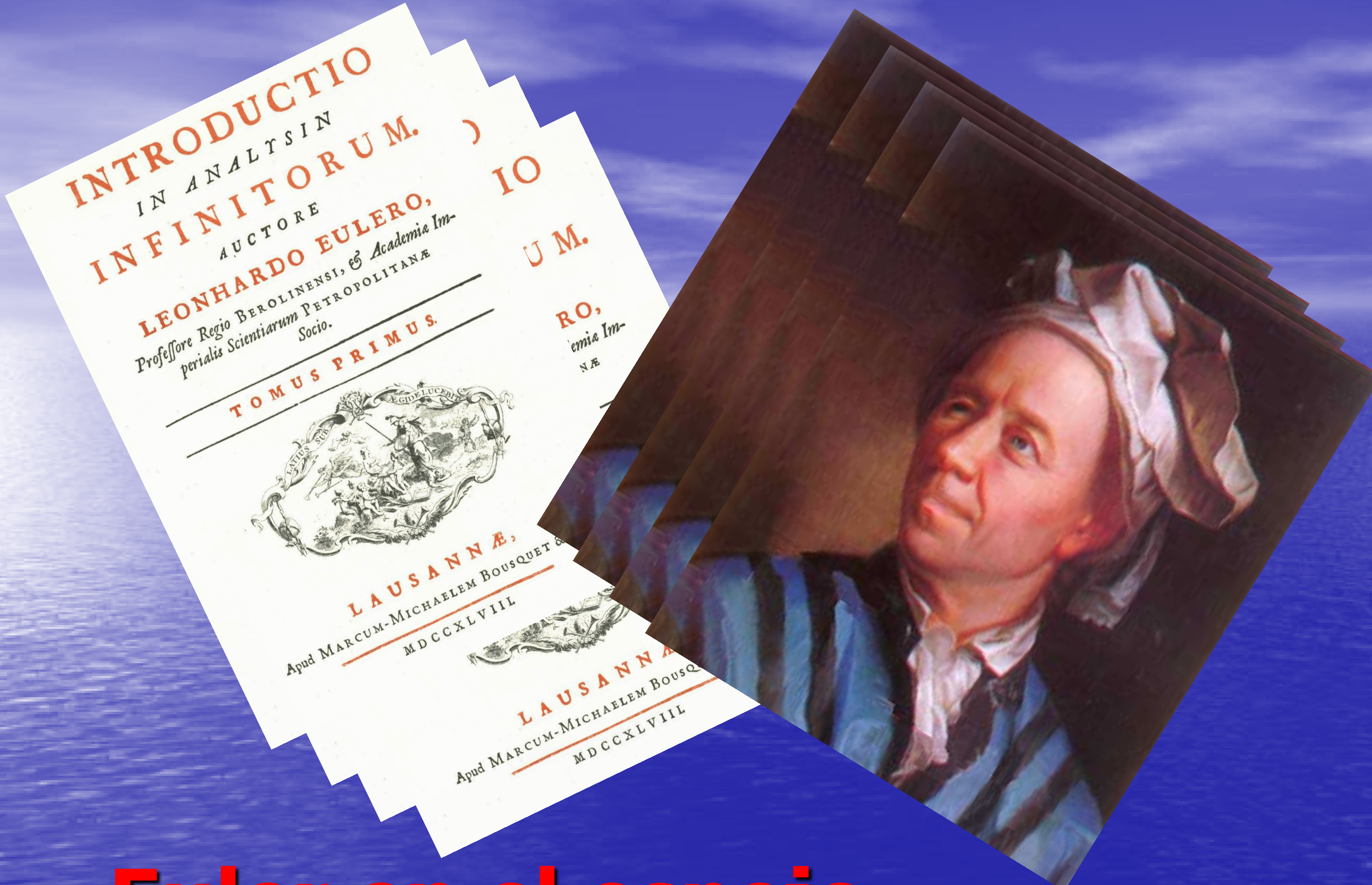
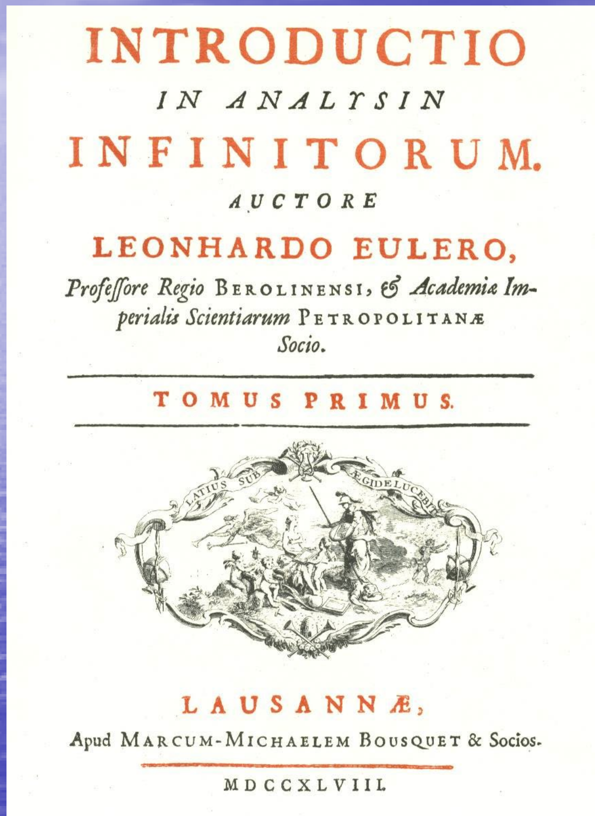


Euler en el espejo de la *Introductio*

por Antonio J. Durán

Euler en el espejo de la *Introductio*



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ
Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

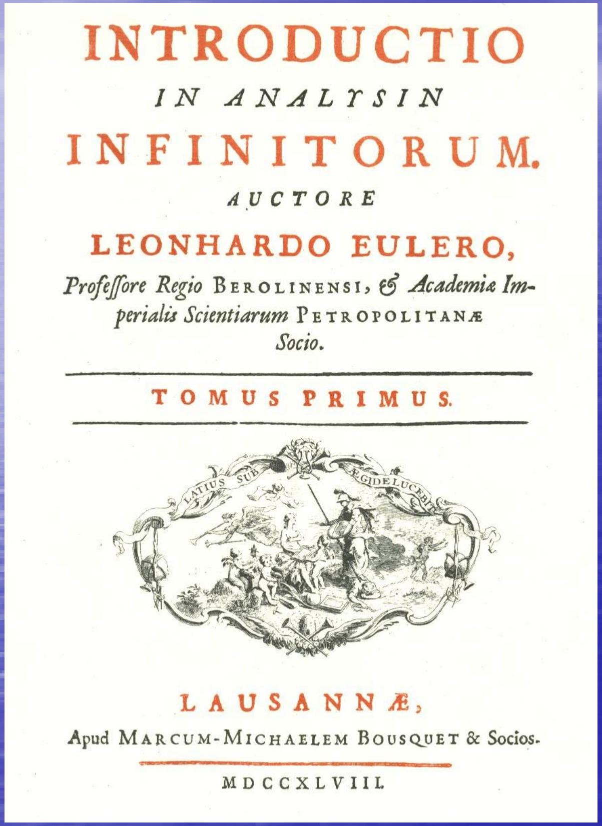
Con la *Introductio* (un libro con el que prácticamente todos los autores posteriores admiten tener una deuda), Euler llevó a cabo lo que Euclides y Al-Khowarizmi habían hecho con la geometría sintética de los griegos y el álgebra elemental, respectivamente. El concepto de función y los procesos infinitos habían surgido durante el siglo XVII, pero fue la *Introductio* de Euler la que los elevó al grado de tercer miembro del triunvirato matemático compuesto por geometría, álgebra y análisis.

Carl Boyer

Difícilmente podemos encontrar otra obra en la historia de las matemáticas que produzca en el lector una impresión tan fuerte de la genialidad de su autor.

E.W. Hobson

Euler en el espejo de la *Introductio*


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Después de haberme hecho el plan de un tratado completo sobre el análisis de los infinitos me di cuenta de que tenían que precederle muchas cosas que propiamente no están incluidas en él ni se encuentran apenas tratadas en ninguna parte; y de ellas ha salido esta obra como pródomo al análisis de los infinitos.

Euler a Goldbach (4 julio 1744)

Introductio: Terminada: 1744
Publicada: 1748

Euler: Nace: 1707
Basilea: 1707-1727
San Petersburgo: 1727-1741
Berlín: 1741-1766
San Petersburgo: 1766-1783

Euler en el espejo de la *Introductio*

Imaginativo y no exento de ironía

$$\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots$$

Todo $n \in \mathbf{Z}$ se escribe de manera única como

$$n=\sum_{finita}\varepsilon_k 3^k \quad \text{donde, } k \in \mathbf{N} \text{ y } \varepsilon_k = 0,1,-1$$

$(15 = 3^3 - 3^2 - 3)$

"Ahora bien, la práctica del peso suele mostrar que puede pesarse toda carga con pesas menores que aumenten en razón geométrica triple, esto es, 1, 3, 9, 27, 81, etc., libras, siempre que no sea menester pesar fracciones. En esta suerte de práctica, empero, se deben poner pesas no sólo en un plato, sino en ambos, como la necesidad lo exija."

Euler en el espejo de la *Introductio*

Imaginativo y no exento de ironía

$$P(x)=\left(\frac{1}{x}+1+x\right)\left(\frac{1}{x^3}+1+x^3\right)\left(\frac{1}{x^9}+1+x^9\right)\left(\frac{1}{x^{27}}+1+x^{27}\right)\cdots$$

$$P(x)=\cdots+\frac{a_{-3}}{x^3}+\frac{a_{-2}}{x^2}+\frac{a_{-1}}{x}+1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$\frac{P(x)}{\left(\frac{1}{x}+1+x\right)}=\left(\frac{1}{x^3}+1+x^3\right)\left(\frac{1}{x^9}+1+x^9\right)\left(\frac{1}{x^{27}}+1+x^{27}\right)\cdots\quad=P(x^3)$$

$$1+\sum_{n\in\mathbf{Z}/\{0\}}a_nx^n=\ P(x)=\left(\frac{1}{x}+1+x\right)P(x^3)\ =\left(\frac{1}{x}+1+x\right)\left(1+\sum_{n\in\mathbf{Z}/\{0\}}a_nx^{3n}\right)$$

De donde $P(x)=\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots$

Euler en el espejo de la *Introductio*

Imaginativo y no exento de ironía

$$\left(\frac{1}{x}+1+x\right)\left(\frac{1}{x^3}+1+x^3\right)\left(\frac{1}{x^9}+1+x^9\right)\left(\frac{1}{x^{27}}+1+x^{27}\right)\cdots$$

$$=\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$\left(x^{-1\times 3^0}+x^{0\times 3^0}+x^{1\times 3^0}\right)\left(x^{-1\times 3^1}+x^{0\times 3^1}+x^{1\times 3^1}\right)\left(x^{-1\times 3^2}+x^{0\times 3^2}+x^{1\times 3^2}\right)\left(x^{-1\times 3^3}+x^{0\times 3^3}+x^{1\times 3^3}\right)\cdots$$

Todo $n \in \mathbf{Z}$ se escribe de manera única como

$$n=\sum_{\textit{finita}} \varepsilon_k 3^k \quad \text{donde } \varepsilon_k = 0, 1, -1$$

Euler en el espejo de la *Introductio*

La genialidad de Euler: convertir productos en sumas, funciones generatrices.

Aplicaciones sorprendentes: particiones de números

$$Q(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = \sum_n a_n x^n$$

a_n = número de veces que n puede ser escrito como suma de números diferentes

$$R(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots} = \sum_n c_n x^n$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots) \ldots$$

$$n = m_1 + 3m_3 + 5m_5 + \ldots = \underbrace{1+\ldots+1}_{m_1} + \underbrace{3+\ldots+3}_{m_3} + \underbrace{5+\ldots+5}_{m_5} + \ldots$$

c_n = número de veces que n puede ser escrito como suma de números impares iguales o diferentes

Teorema: $a_n = c_n$

Euler en el espejo de la *Introductio*

La genialidad de Euler: convertir productos en sumas, funciones generatrices.

Aplicaciones sorprendentes: particiones de números

Demostración del teorema: $a_n = c_n$

$$Q(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

$$P(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots$$

$$P(x)Q(x) = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots$$

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{P(x)}{P(x)Q(x)} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots = \frac{1}{R(x)}$$

$$Q(x) = R(x)$$

O sea, $a_n = c_n$

Euler en el espejo de la *Introductio*

La genialidad de Euler (2): convertir productos en sumas.

Una deuda heredada: $¿\sum_{n} \frac{1}{n^2}?$

Leibniz: un optimista sin complejos

$$\sum_{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Collins (¿Newton?, ¿J. Gregory?) a Leibniz (1673): $¿\sum_{n} \frac{1}{n^2}?$

Euler en el espejo de la *Introductio*

Una deuda heredada: $¿\sum_{n} \frac{1}{n^2}?$

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)\ldots$$

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \ldots \qquad P = A$$

$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots \qquad Q = AP - 2B$$

$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \ldots \qquad R = AQ - BP + 3C$$

$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \ldots \qquad S = AR - BQ + CP - 4D$$

Euler en el espejo de la *Introductio*

Una deuda heredada: $¿\sum_{n}\frac{1}{n^2}?$

$$1-\frac{\pi^2}{3!}x^2+\frac{\pi^4}{5!}x^4-\ldots=\frac{sen(\pi x)}{\pi x}=\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\ldots$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+ \quad = \frac{2^2}{5!}\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{2^4}{7!}\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\ldots=\frac{2^{24}}{27!}\frac{76977}{1}$$

Imaginativo, no exento de ironía, con gran capacidad narrativa

Euler en el espejo de la *Introductio*

Calvinista sí; sincero, casi siempre; ordenado, siempre.

"Comoquiera que la humanidad se haya propagado tras el diluvio por obra de seis seres humanos, si ponemos que el número de estos alcanzara doscientos años después la cifra de un millón, se busca en cuánta parte habría debido incrementarse anualmente el número de hombres."

Si se multiplican continuamente los factores de

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots$$

aparecerá

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

serie de la que se desprende, atentamente considerada, no haber en ella otras potencias de x sino aquéllas cuyos exponentes estén contenidos en la fórmula $\frac{3n^2 \mp n}{2}$; y si n fuere número impar serían las potencias negativas, pero positivas en cambio si fuere par.

Euler en el espejo de la *Introductio*

Euler: Capacidad para ilustrar con magníficos ejemplos.

¿Tan agradecido como se dice?

Las fracciones continuas y los calendarios *juliano* y *gregoriano*

- Calendario egipcio: años de 365 días (12 meses de 30 días más 5 días agrupados al final del año).
- Calendario juliano (46 a.C.): años de 365 días y cada cuatro uno de 366.
- Calendario gregoriano (1585): años de 365 días, cada cuatro uno de 366, de los que se eliminan 3 cada cuatro siglos (los años terminados en 00 y cuyas primeras cifras no sean múltiplo de 4).

Euler en el espejo de la *Introductio*

Euler: Capacidad para ilustrar con magníficos ejemplos.

¿Tan agradecido como se dice?

Las fracciones continuas y los calendarios *juliano* y *gregoriano*

Razón áurea

$$c = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = c \quad \Rightarrow \quad c = 1 + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Aproximantes

$$a_0, a_0 + \frac{1}{a_1}, a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \ldots$$

$$a_{0,} \qquad \frac{p_1}{q_1}, \qquad \frac{p_2}{q_2},$$

Aproximantes

$$1, 1 + \frac{1}{1}, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}, \cdots$$

$$2, \qquad \frac{3}{2}, \qquad \frac{5}{3}, \qquad \frac{8}{5}, \qquad \ldots$$

Euler en el espejo de la *Introductio*

Euler: Capacidad para ilustrar con magníficos ejemplos.

¿Tan agradecido como se dice?

Las fracciones continuas y los calendarios *juliano* y *gregoriano*

Aproximantes

$$\frac{60}{7}=8+\frac{4}{7}=8+\frac{1}{\frac{7}{4}}=8+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=8+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=8+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

$$8,\ 9,\ \frac{17}{2},\ \frac{60}{7}$$

Duración del año (aprox.) $365^{d}, 5^{h}, 48', 55''$ =365 días + $\frac{20935}{86400}$ días.

$$\frac{20935}{86400}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}}}}}}}$$

Aproximantes

$$\frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\frac{55}{227},\frac{63}{260},\frac{181}{747},\ldots$$

juliano

gregoriano

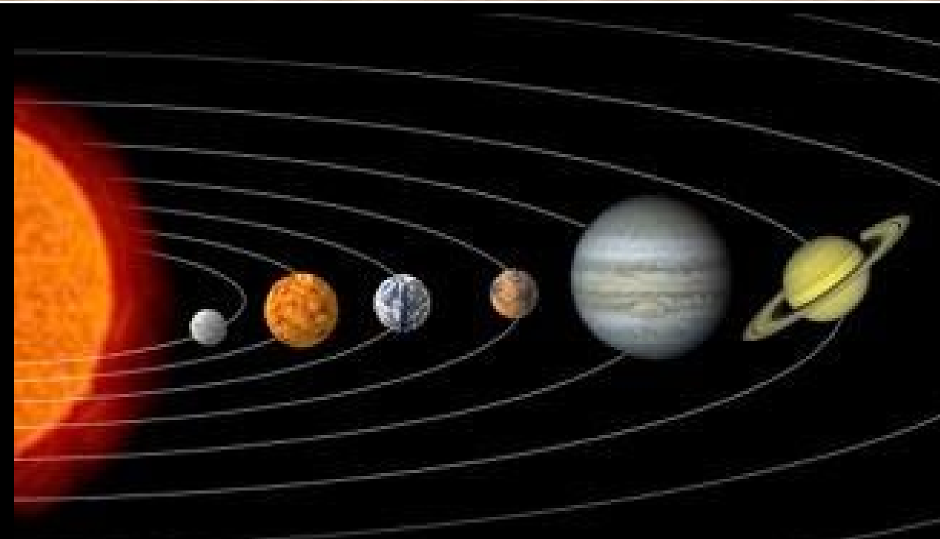
$$\frac{181}{747}=\frac{97}{400}-\frac{59}{298800}\cong\frac{97}{400}$$

Euler en el espejo de la *Introductio*

Euler: ¿tan agradecido como se dice?

"Por lo demás, como aparecen aquí no pocas cosas ya tratadas por otros, es oportuno que pida indulgencia por no hacer honrosa mención de quienes trabajaron antes de mí en el mismo género de asuntos. Como mi propósito era tratarlo todo con la mayor brevedad posible, la historia de cada problema habría aumentado en no poca medida la longitud de la obra".

El "bisabuelo" Huygens



Recorrido en 365 días

Tierra: 359º, 45', 41"

Saturno: 12º,13', 34"

$$\frac{1295141}{44014} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}}$$

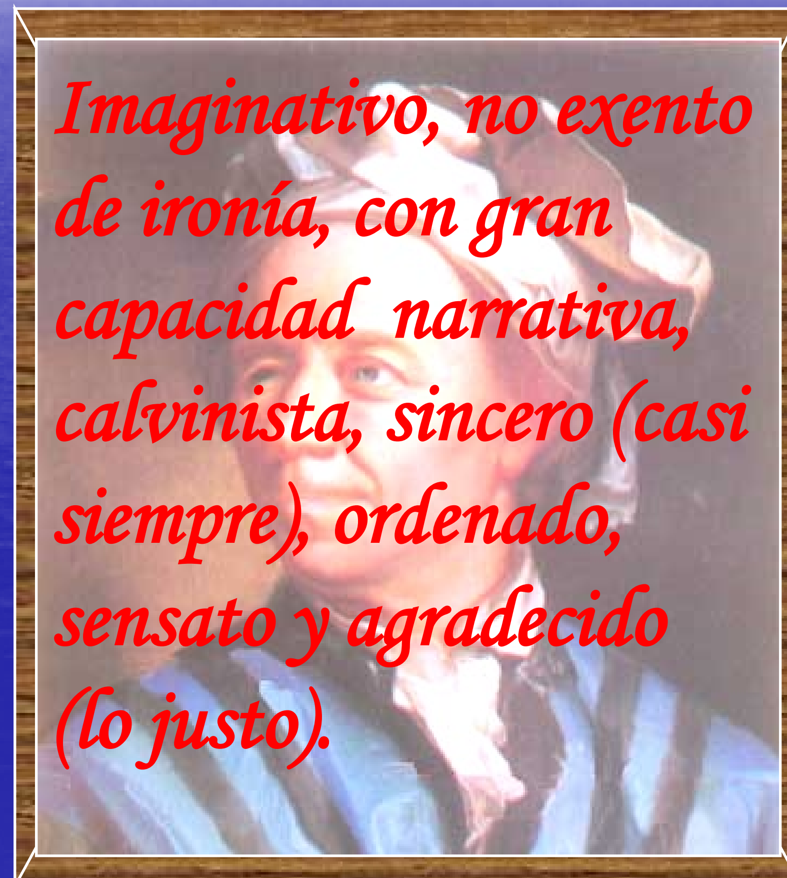
Cuarto aproximante

$$\frac{206}{7}$$

Error: $\leq$ 40' en un siglo

Euler en el espejo de la *Introductio*

L. Euler (1707-1783)



Introductio in analysim infinitorum

Euler en el espejo de la *Introductio*

$$\cos\left(\frac{v}{2}\right)+\tan\left(\frac{g}{2}\right)sen\left(\frac{v}{2}\right)=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\ldots$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32}$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\ldots=\frac{5\pi^5}{1536}$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{960}$$

Imaginativo, no exento de ironía, con gran capacidad narrativa