

Cuando lo imaginario se vuelve real:
cómo, y por qué, usar la historia para introducir los números
complejos

*1ª Escuela de Verano CEMat en Historia de las Matemáticas:
estudio, aplicaciones y enseñanza*

Eduardo Dorrego López



- De: $\sqrt{-1}$ no existe, a: $\sqrt{-1}$ es un ¡número!
- Desterrar tópicos: los números complejos surgen para que ciertas ecuaciones de grado 2 tuvieran solución:

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

¡NO!

Realidad: más sutil, aunque sí que es cierto que el origen está en el álgebra.

Números complejos $\longleftrightarrow$ Resolución de la cúbica

- El lado humano de la disciplina: egos, rivalidades, enfrentamientos, colaboraciones... lo que lleva al desarrollo de la matemática.

LA SOLUCIÓN DE LA CÚBICA



LA SOLUCIÓN DE LA CÚBICA



La opinión general sobre el tema

Luca Pacioli (1445–1517) en su libro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* (1494) afirma que la solución de la cúbica es tan imposible en el estado que estaba la ciencia en aquel momento como la cuadratura del círculo.



bauerat. i. ce. p. i. cu. equia. i. ce. ce. p. qto p. scilicet ameto. Et tale obediencia vorra qto chel p. et pot scilicet vna tra volta pur p. cosa bauerat. i. co. p. i. ce. Et quale a. i. cu. e pur la medesima obediencia vorra qto omo li voi primi. Et poi acoza scilicet vna tra volta pur p. cosa bauerat. i. n. p. i. co. equia. i. ce. Et che tu sei venuto a cosa e niero egle a celo. che, fo vn de li. 3. copo / fti che sopra bauersti. Et che el p. aguagliamento vol che si smeggi li celi de celi. Et mebbe in se. vna mita. Et sopra qto che fa gioga la quantita de cubi. Et. 2. di qila suma piu el dimezzamento di celi di celi varra la cosa. Et p. lo secodo aguagliamento vol che tu smeggi li cubi e mebbi i se. Et a q. ch. fa gioga li celi e. 2. di tal suma. p. ditto dimezzamento de cubi: ita la ualuta d. la cosa. Per lo terzo aguagliamento vol che tu dimeggi li celi. Et mebbi i se. Et a q. che fa gioga le cose. Et. 2. di la suma piu ditto dimezzamento ual la cosa. Et. 4. aguaglio uole ch. se dimeggi le cose. Et. 2. como e detto. Et che tu hai obediencia de. 4. capitoli mediante ditte scilicet. La q. cosa molto fa al. p. p. osito de la fabricazione sopra ditte de capitoli. Et da se tu la p. c. etione subito uo lesse deprimere: cioe al basso suo ultio scilicet. Et loza baueresti p. qto qile dignita p. p. q. calt. sua magior comunita: cioe p. cubo. Et subito serefti venuto a celo egle a cosa e n. Et che i al. cado edepzimento ditte dignita te formarano infiniti capitoli. Et da de n. cosa e cubo fra loro siado copoliti ouer de n. celo e cubo. ouer de n. cubo e celo de celo no se possuto finora troppo bene formare regole generali p. la disproporzionalita fra loro. Et perche fra loro no so. no iterualli equi: onde fra la cosa el n. no media alcuna dignita ne natura: fra la cosa el cubo media el celo. Et che no ne la debita bitudine fra loro poche vno e piu distare, dal suo extremo che laltro. Et cosi fra el celo e cubo niuna cosa media. Et fra el celo el numero media la cosa. Et po. acoza de li aguagliamenti loro no si podare r. generale. Et non aeuolte astraffoni (como e ditto di sopra) i q. che caso particolare. Et po. q. do i li toi aguagliamenti te ritroui termini de diuersi iterualli fra loro disproporzionali: dirai che larte ancora a tal caso no a. dato modo si como ancora no e dato mo al. q. drare del cerchio. Et che ista itane simul chel caso ita possibile: per anco el modo auouerto non ha dato p. la iproporzionalita che e carua. De fortetibus. Tractatus primus.

“che larte ancora a tal caso non ha dato modo fi como ancora no e dato mo al quadrare del cerchio”

“Que la matemática aún no ha hallado la manera de resolver tal cuestión, así como aún no se ha hallado el modo de cuadrar el círculo”

Los principales protagonistas





- Niccolo Tartaglia (1499–1557) nace en Brescia en el seno de una familia pobre.
- Es herido de gravedad en el “Saqueo de Brescia” (1512), pero sobrevive gracias a los cuidados de su madre.
- Atodidacta, comienza pronto (1514) el estudio de las matemáticas de la mano de los clásicos (Euclides, Arquímedes, Apolonio) y del latín, haciendo rápidos progresos.



- A los 18 años se marcha a Verona donde se casa y tiene un hijo. Allí adquiere reputación como profesor de matemáticas dirigidas a la práctica comercial: “maestro del ábaco”.
- El sueldo es bajo, con lo que compagina con otras labores con las que sacar rédito de sus habilidades como matemático, dándose a conocer cada vez más...



- A los 18 años se marcha a Verona donde se casa y tiene un hijo. Allí adquiere reputación como profesor de matemáticas dirigidas a la práctica comercial: “maestro del ábaco”.
- El sueldo es bajo, con lo que compagina con otras labores con las que sacar rédito de sus habilidades como matemático, dándose a conocer cada vez más...
atrayendo a otros expertos para retarlo.



- Los **debates y duelos** sobre matemáticas (y otros temas) se retrotraen al medievo.
- En ellos se juntaban las más altas autoridades de la ciudad, contanto incluso con la presencia del Emperador, ante un enorme gentío.
- En Bolonia (1474), incluso se requería a los profesores que participasen en debates y retos al final de las clases como preparación, al menos dos veces al año.



- Esta popular práctica académica, lejos de ser un juego podía ser vital para los intereses de los participantes: gloria, fama, más alumnos, más salario, un puesto en la universidad, etc...
- Había reglas: un retador no podía proponer problemas que no supiera resolver.



- En 1530, un profesor de Brescia, Zuanne de Tonini da Coi, reta a Tratataglia:

“Me pide que encuentre un número, que multiplicado por su raíz más 3 sea igual a 5 ...”

in una. Voi me adimandau, che ui trouasse un numero, che multiplicato per la sua ra-
dice piu. 3. facesse. 5. qual questo conduce l'operante, come sapeti in. 1. cubo piu. 3. cen-
si egual a. 5. Et io ue rescritti, che uoi non saprestu risolvere tai dui questi a me man-



- En 1530, un profesor de Brescia, Zuanne de Tonini da Coi, reta a Tratataglia:

“Me pide que encuentre un número, que multiplicado por su raíz más 3 sea igual a 5 ...”

*in una. Voi me adimandau, che ui trouasse un numero, che multiplicato per la sua ra=
dice piu. 3. facesse. 5. qual questo conduce l'operante, come sapeti in. 1. cubo piu. 3. cen=
si equal a. 5. Et io ue rescrissi, che uoi non saprestu risolvere tai dui questi a me man=*

$$x^2(x + 3) = 5 \rightarrow x^3 + 3x^2 = 5$$



“Señor Zuanne, me ha enviado estas dos cuestiones que son imposibles de resolver, o al menos desconocidas para usted [...] Estos capítulos hasta ahora habían sido considerados como imposibles de resolver por Fra Luca y otros. Cree que con esto se pone por encima de mí y aparece como un gran matemático, como he oído que ha hecho con todos los profesores en Brescia, que temiendo sus pregunta no osan hablar con usted.”

¿“Capítulos”?

Nosotros:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ellos (Cardano)

- $x^3 + ax = N$
- $x^3 = ax + N$
- $x^3 + N = ax$
- $x^3 = ax^2 + N$
- $x^3 + ax^2 = N$
- $x^3 + N = ax^2$
- $x^3 + ax^2 + bx = N$
- $x^3 + ax = bx^2 + N$
- $x^3 + ax^2 = bx + N$
- $x^3 = ax^2 + bx + N$
- $x^3 + N = ax^2 + bx$
- $x^3 + ax + N = bx^2$
- $x^3 + ax^2 + N = bx$



“Por ello, para corregir la vanidosa opinión que tiene de usted mismo [...] le digo que pedir a otros buscar soluciones que no puede encontrar por sí mismo debería ruborizarlo [...] Estoy dispuesto a apostar 10 ducados contra 5 a que no será capaz de resolver con una regla general las dos cuestiones que me propone.”



- Tartaglia descubre su farol pero Zuanne aguanta el golpe y le pregunta si él también considera imposible encontrar una fórmula para resolver dicha ecuación:

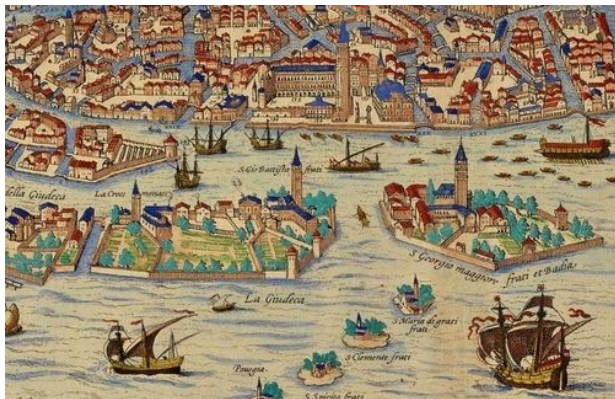
“No estoy diciendo que tales casos sean imposibles. Por el contrario, para el primero [...] estoy convencido de haber encontrado la regla general, pero por el momento prefiero no revelarla por varias razones.”



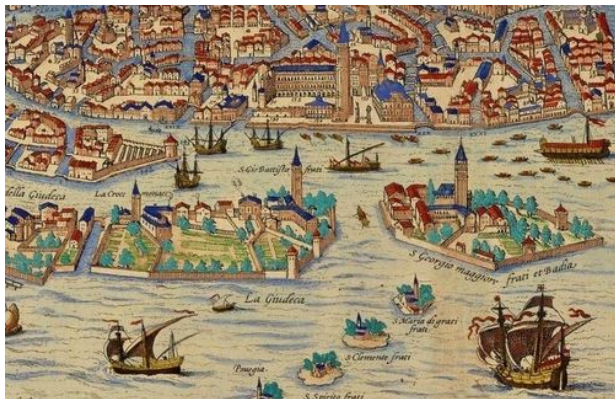
- Tartaglia descubre su farol pero Zuanne aguanta el golpe y le pregunta si él también considera imposible encontrar una fórmula para resolver dicha ecuación:

“No estoy diciendo que tales casos sean imposibles. Por el contrario, para el primero [...] estoy convencido de haber encontrado la regla general, pero por el momento prefiero no revelarla por varias razones.”

- ¿Había descubierto Tartaglia la regla general?



- Tartaglia se muda a Venecia en 1534 probablemente con el deseo de imprimir sus obras.
- Allí realiza múltiples actividades: investigación, lecciones (públicas y privadas) ...



- Tartaglia se muda a Venecia en 1534 probablemente con el deseo de imprimir sus obras.
- Allí realiza múltiples actividades: investigación, lecciones (públicas y privadas) ... ¡y retos!

- En 1535 es retado por Antonio Maria Fior, un respetado académico de Venecia, un duelo que recibió una gran atención en Italia.
- Reglas:
 - 30 problemas cada uno.
 - Entregados a un notario público (22/02/1535).
 - Tiempo: 40 o 50 días.
- Apuesta:
 - Gloria, reputación, ...
 - ¡Una suntuosa cena por cada problema no resuelto!
- Resultado:

- En 1535 es retado por Antonio Maria Fior, un respetado académico de Venecia, un duelo que recibió una gran atención en Italia.
- Reglas:
 - 30 problemas cada uno.
 - Entregados a un notario público (22/02/1535).
 - Tiempo: 40 o 50 días.
- Apuesta:
 - Gloria, reputación, ...
 - ¡Una suntuosa cena por cada problema no resuelto!
- Resultado: Tartaglia en 2 horas resuelve todos, y Fior en el plazo establecido no resuelve ninguno.

- El resultado del duelo se extiende más allá de Venecia, llegando a oídos de Zuanne de Tonini en Brescia quien viaja a Venecia para encontrarse con Tartaglia (1536):

“Hace varios días oí que entraste en un reto con el Maestro Antonio Maria Fior [...] resolviendo los treinta problemas en dos horas, lo cual encuentro difícil de creer.”

- El resultado del duelo se extiende más allá de Venecia, llegando a oídos de Zuanne de Tonini en Brescia quien viaja a Venecia para encontrarse con Tartaglia (1536):

“Hace varios días oí que entraste en un reto con el Maestro Antonio Maria Fior [...] resolviendo los treinta problemas en dos horas, lo cual encuentro difícil de creer.”

“Todo lo que te han dicho es cierto [...] La razón por la cual pude resolverlos tan rápidamente es porque todos llevaban por medio del álgebra a la cosa y el cubo igual al número [$x^3 + bx = c$]. Él creyó que no podría resolverlas, porque Fra Luca consideraba tales capítulos [casos] imposibles de resolver con un regla general; y yo, por un golpe de suerte, solo 8 días antes de la fecha de entrega de los problemas ante el notario encontré la regla general. Esto ocurrió el año pasado, el 12 de febrero de 1535.”

- Pero, esto significaba que Fior podía resolver también estos problemas, es decir, que él mismo habría llegado a la regla general. ¿Era así o estaba jugando sucio?

“Él presumía de haber encontrado tal regla para asustarme. Al principio, no le creí [...] Pero, para hacerme creer que debería temerle [...] me aseguró que hacía 30 años un gran matemático le había revelado el secreto. Tuve la sensación de que podía ser verdad, y por esta razón postergué mis estudios, cuidados, y trabajo para encontrar la regla para tal capítulo.”

- Pero, esto significaba que Fior podía resolver también estos problemas, es decir, que él mismo habría llegado a la regla general. ¿Era así o estaba jugando sucio?

“Él presumía de haber encontrado tal regla para asustarme. Al principio, no le creí [...] Pero, para hacerme creer que debería temerle [...] me aseguró que hacía 30 años un gran matemático le había revelado el secreto. Tuve la sensación de que podía ser verdad, y por esta razón postergué mis estudios, cuidados, y trabajo para encontrar la regla para tal capítulo.”

- Zuanne le pide a Tartaglia la lista de sus problemas con la soluciones, pero este se niega (son todas del tipo $x^3 + bx = c$), pero sí comparte 4 de los que él le envió a Fior:

$$x^3 + 40x^2 = n \quad \text{"Encontré la regla a finales de 1530,"}$$

$$x^3 + n = 30x^2 \quad \text{cuando vivía en Verona"}$$

$$x^3 + 4x = 13 \quad \text{Tartaglia tira la caña}$$

$$x^3 = 3x + 10 \quad \text{13 de febrero de 1535}$$

- A base de insistir, Zuanne, en su segundo encuentro con Tartaglia 5 días después, consigue que este le dé la respuesta, sin demostración, a la primera ecuación ($n = 2888$).
- Con ello, Zuanne consigue deducir el método (carta 8/01/1537).



- El eco del duelo llega a Milán.
- El 02/01/1539 un vendedor de libros (Zuanantonio) llega a Venecia de parte de nada menos que de Cardano, respetado erudito, con deseos de conseguir la solución de la cúbica para incluirla en el libro que estaba escribiendo.
- Doctor en Medicina por Padua (1526) y versado en matemáticas, Cardano fue un personaje tan importante como particular:



“Reconozco como único y sobresaliente entre mis defectos, el hábito, que aún tengo, de preferir decir sobre todas las cosas lo que sé que será molesto para los oídos de los que me escuchan. Soy consciente de ello, sin embargo sigo haciéndolo intencionadamente, de ninguna manera ignorante de la cantidad de enemigos que he hecho por ello.”



Girolamo Cardano

The Book Of My Life, Trad. por Jean Stoner

New York (p. 52).

[https://archive.org/details/](https://archive.org/details/GirolamoCardanoTheBookOfMyLifeDeVitaPropriaLiber/mode/2up?q=enemies)

[GirolamoCardanoTheBookOfMyLifeDeVitaPropriaLiber/mode/2up?q=enemies](https://archive.org/details/GirolamoCardanoTheBookOfMyLifeDeVitaPropriaLiber/mode/2up?q=enemies)

- Zuanantonio vuelve a Milán con las manos vacías.
- Cardano, molesto, envía una carta a Tartaglia (12/02/1539):

“Me gustaría hacerte ver, amablemente, que estás más cerca del valle que de la cima de la montaña.”

- Empieza un tira y afloja entre ambos, que culmina con una visita de Tartaglia a Milán, en presencia de Ludovico Ferrari, ayudante de Cardano, de 17 años.
- Finalmente, y tras hacer que Cardano jurase no publicar su fórmula, Tartaglia comparte su método para resolver:

$$x^3 + bx = c, \quad x^3 + c = bx, \quad x^3 = bx + c.$$
- Lo hace en forma de poema *“para recordar la secuencia de operaciones cada vez que las necesito”*:



Fabio Toscano

*The secret formula. How a Mathematical
Duel Inflamed Renaissance Italy and
Uncovered the Cubic Equation.*

Princeton University Press (pp. 72, 84–85).

“Cuando el cubo con la cosa juntos: $x^3 + bx$.

se igualan a cualquier número discreto: $= c$

Encontrar a otros dos que difieran en ello: $u - v = c$

Luego harás esto como hábito

Que su producto siempre sea igual: $u \cdot v$

A la tercera parte de la cosa elevada al cubo: $(\frac{b}{3})^3$

Entonces el resultado

De sus raíces cúbicas restadas adecuadamente: $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Será el valor de tu cosa principal”: $= x$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}$$

“Recuerda tu promesa”



Fabio Toscano

*The secret formula. How a Mathematical
Duel Inflamed Renaissance Italy and
Uncovered the Cubic Equation.*

Princeton University Press (pp. 72, 84–85).

Tartaglia también comparte en el poema el método para resolver las otras dos clases. El caso que más nos interesa es el de las ecuaciones del tipo $x^3 = bx + c$, cuya solución es:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}$$

*“Estos encontré, y no con pasos lentos
En mil quinientos treinta y cuatro [1535]
Con firmes y vigorosas bases
En la ciudad rodeada por el mar”*



Fabio Toscano

*The secret formula. How a Mathematical
Duel Inflamed Renaissance Italy and
Uncovered the Cubic Equation.*
Princeton University Press (pp. 91–92).

- $x^3 + 3x = 10$ (C. pide a T.)

- $x^3 + 3x = 10$ (C. pide a T.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$$

- $x^3 + 3x = 10$ (C. pide a T.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$$

- $x^3 = 9x + 10$ (C. pide a T.)

- $x^3 + 3x = 10$ (C. pide a T.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$$

- $x^3 = 9x + 10$ (C. pide a T.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-2} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{-2} - 5}$$

“Estoy seguro de haber entendido la regla, pero cuando el cubo de la tercera parte de la cosa es mayor que el cuadrado de la mitad del número, no puedo aplicarla tal y como es” (C → T)



Fabio Toscano

*The secret formula. How a Mathematical
Duel Inflamed Renaissance Italy and
Uncovered the Cubic Equation.*

Princeton University Press (pp. 88-89, 96).

- $x^3 + 3x = 10$ (C. pide a T.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$$

- $x^3 = 9x + 10$ (C. pide a T.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-2} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{-2} - 5}$$

“Mi respuesta para ti es que no has tomado el enfoque correcto para resolver tal ecuación; y que tu método es completamente falso” ($T \rightarrow C$)



Fabio Toscano

*The secret formula. How a Mathematical
Duel Inflamed Renaissance Italy and
Uncovered the Cubic Equation.*
Princeton University Press (p. 97).



- Cardano y Ferrari viajan en 1542 a Bolonia y descubren algo extraordinario.
- Allí visitan a Annibale Della Nave, quien ocupaba la Cátedra que había dejado vacante su suegro tras su muerte, un tal Scipione Dal Ferro.



- Este les enseña un libro de notas que su suegro le había legado y que incluía...



- Este les enseña un libro de notas que su suegro le había legado y que incluía...
¡la solución de la cúbica!



Dal Ferro había mantenido en secreto su descubrimiento, al que había llegado unos 30 años antes que Tartaglia, revelándosela solo a unas pocas personas, entre ellas:

- Annibale Della Nave.
- Pompeo Bolognetti.
- Antonio Maria del Fior.



Dal Ferro había mantenido en secreto su descubrimiento, al que había llegado unos 30 años antes que Tartaglia, revelándosela solo a unas pocas personas, entre ellas:

- Annibale Della Nave.
- Pompeo Bolognetti.
- **Antonio Maria del Fior.**

- Pero, esto significaba que Fior podía resolver también estos problemas, es decir, que él mismo habría llegado a la regla general. ¿Era así o estaba jugando sucio?

“Él presumía de haber encontrado tal regla para asustarme. Al principio, no le creí [...] Pero, para hacerme creer que debería temerle [...] me aseguró que hacía 30 años un gran matemático le había revelado el secreto. Tuve la sensación de que podía ser verdad, y por esta razón postergué mis estudios, cuidados, y trabajo para encontrar la regla para tal capítulo.”

- Zuanne le pide a Tartaglia la lista de sus problemas con la soluciones, pero este se niega (son todas del tipo $x^3 + bx = c$), pero sí comparte 4 de los que él le envió a Fior:

Ahora Cardano ya no siente que tenga que guardarse de publicar la fórmula de Tartaglia para su nuevo libro, ya que en todo caso estaría publicando la de Dal Ferro... así que lo publica.

- *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*, 1545.
- De todos modos, Cardano da crédito a quien debe darlo, mencionando a Dal Ferro y a “*mi amigo Niccolò Tartaglia de Brescia*”.
- Tartaglia entra en cólera: a partir de este momento se suceden los retos públicos (*cartellos*) entre este y su discípulo, acompañados de duras acusaciones: plagiarismo, pruebas incompletas, deshonor, etc.



Gerolamo Cardano

Ars Magna or the rules of Algebra
(translated by T. Richard Witmer).
Dover. (p. 8)

El *Artis Magnae* de Cardano (1545)



- El año 1545 es una fecha particularmente importante en la historia del álgebra, pues en el libro de Cardano aparece publicada por vez primera la solución general de la cúbica.
- A mayores, se incluyen los primeros cálculos con números complejos aplicados a la resolución de un problema, si bien el autor deja clara su inutilidad.

- El año 1545 es una fecha particularmente importante en la historia del álgebra, pues en el libro de Cardano aparece publicada por vez primera la solución general de la cúbica.
- A mayores, se incluyen los primeros cálculos con números complejos aplicados a la resolución de un problema, si bien el autor deja clara su inutilidad.

“Si alguien dice que dividamos 10 en dos partes cuyo producto sea 30 o 40, es claro que es imposible.”

- El año 1545 es una fecha particularmente importante en la historia del álgebra, pues en el libro de Cardano aparece publicada por vez primera la solución general de la cúbica.
- A mayores, se incluyen los primeros cálculos con números complejos aplicados a la resolución de un problema, si bien el autor deja clara su inutilidad.

“Si alguien dice que dividamos 10 en dos partes cuyo producto sea 30 o 40, es claro que es imposible.”

¿Por qué?

- El año 1545 es una fecha particularmente importante en la historia del álgebra, pues en el libro de Cardano aparece publicada por vez primera la solución general de la cúbica.
- A mayores, se incluyen los primeros cálculos con números complejos aplicados a la resolución de un problema, si bien el autor deja clara su inutilidad.

“Si alguien dice que dividamos 10 en dos partes cuyo producto sea 30 o 40, es claro que es imposible.”

¿Por qué? $\rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$,

- El año 1545 es una fecha particularmente importante en la historia del álgebra, pues en el libro de Cardano aparece publicada por vez primera la solución general de la cúbica.
- A mayores, se incluyen los primeros cálculos con números complejos aplicados a la resolución de un problema, si bien el autor deja clara su inutilidad.

“Si alguien dice que dividamos 10 en dos partes cuyo producto sea 30 o 40, es claro que es imposible.”

¿Por qué? $\rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$, lo que da como resultado:

$$5 + \sqrt{-15} \quad , \quad 5 - \sqrt{-15}$$

- El año 1545 es una fecha particularmente importante en la historia del álgebra, pues en el libro de Cardano aparece publicada por vez primera la solución general de la cúbica.
- A mayores, se incluyen los primeros cálculos con números complejos aplicados a la resolución de un problema, si bien el autor deja clara su inutilidad.

“Si alguien dice que dividamos 10 en dos partes cuyo producto sea 30 o 40, es claro que es imposible.”

¿Por qué? $\rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$, lo que da como resultado:

$$5 + \sqrt{-15} \quad , \quad 5 - \sqrt{-15}$$

$$5p : Rm : 15 \quad , \quad 5m : Rm : 15$$

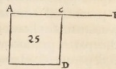


Gerolamo Cardano

Ars Magna or the rules of Algebra
(translated by T. Richard Witmer).
Dover. (p. 219)

DEMONSTRATIO

Ut igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit $A B$ linea, quæ dicatur
 10, diuidenda in duas partes, quarum rectangulum debeat esse 40, est
 aut 40 quadruplū ad 10, quare nos uolumus
 quadruplum totius $A B$, igitur fiat $A D$, qua-
 dratum $A C$, dimidij $A B$, & ex $A D$ auferatur
 quadruplum $A B$, abscq; numero, igitur re-
 sidui, si aliquid maneret, addita & detracta
 ex $A C$, ostenderet partes, at quia tale residu-
 um est minus, ideo imaginaberis 15 , id est differentia $A D$, &
 quadrupli $A B$, quam adde & minue ex $A C$, & habebis quæsitum, scilicet
 $5 p: 12 v: 25 m: 40$, & $5 m: 12 v: 25 m: 40$, seu $5 p: 12 m: 15$, & 5
 $m: 12 m: 15$, duc $5 p: 12 m: 15$ in $5 m: 12 m: 15$, dimissis incru-
 ciationibus, fit $25 m: m: 15$, quod est 15 , igitur hoc productum est 40, natu-
 ra tamē $A D$, non est eadem cū natura 40, nec $A B$, quia superficies est
 remota à natura numeri, & lineæ, proximus
 tamē huic quantitati, quæ uere est sophistica,
 quoniam per eam, non ut in puro m : nec in
 alijs, operationes exercere licet, nec uenari
 quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero produ-
 cendo, & à 12 aggregati minus ac addas dimidium diuidendi. Exem-
 plū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25
 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius 12 minue 5, & adde etiam
 5, habebis partes secundum similitudinem, $12 p: 5$ & $12 m: 5$. At
 hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed 12 260, & hucusq;
 progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo
 est subtile, ut sit inutile.



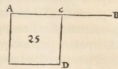
5 p: 12 m: 15
5 m: 12 m: 15
25 m: m: 15 qd. est 40

“[...] dimissis incru-
 ciationibus [...]”

“Putting aside the mental tortures involved”/“the cross-multiples having canceled out”

DEMONSTRATIO

Ve igitur regulæ uerus pateat intellectus, fit A B linea, quæ dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarum rectangulum debeat esse 40, est autem 40 quadruplum ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, abscq; numero, igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis 12 m: 15, id est differentia A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: 12 v: 25 m: 40, & 5 m: 12 v: 25 m: 40, seu 5 p: 12 m: 15, & 5 m: 12 m: 15, duc 5 p: 12 m: 15 in 5 m: 12 m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cum natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximus tamē huic quantitati, quæ uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à 12 aggregati minus ac addas dimidium diuidendi. Exemplum in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratum dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius 12 minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, 12 65 p: 5 & 12 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed 12 260, & huiusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.



5 p: 12 m: 15
5 m: 12 m: 15
25 m: m: 15 qd. est 40

"[...] dimissis incruciationibus [...]"

"Putting aside the mental tortures involved"/"the cross-multiples having canceled out"

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10$$

$$(5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 40$$

“Esta sutileza resulta de la aritmética de la cual este punto final es, como he dicho, tan sutil como inútil”

“Esta sutileza resulta de la aritmética de la cual este punto final es, como he dicho, tan sutil como inútil”

- Cardano usa por primera vez los números complejos, y lo hace como medio para resolver un problema:

“Un aspecto notable de la discusión de Cardano es la clara comprensión de la existencia de soluciones imaginarias o complejas. Aparecen como consecuencias necesarias de las fórmulas, y ni las evita ni las descarta como amenudo hicieron autores anteriores.”

- Aunque su naturaleza es incierta (*Ars Magna Arithmeticae*):
“Notemos que $\sqrt{9}$ es o $+3$ o -3 dado que más por más o menos por menos es más. Por lo tanto, $\sqrt{-9}$ no es ni $+3$ ni -3 sino que es otro tercer tipo de cosa recóndita”.



Gerolamo Cardano

Ars Magna or the rules of Algebra (translated by T. Richard Witmer).

Dover. (pp. viii, 220)

- Pero en relación a las raíces de números negativos, lo que más desconcertaba era el caso de ecuaciones cúbicas con alguna raíz real conocida, pero que a través de la fórmula involucraban números imaginarios.
- Es a partir de esto que surge una “necesidad” de entender este tipo de objetos (los después llamados números imaginarios y, más en general, complejos):

*“fue **la propia práctica de las matemáticas** la que, llegado el momento, hizo imposible que siguieran siendo ignorados”*



Leo Corry

Breve historia de los números. El pensamiento matemático a lo largo del tiempo.

RSME, 2021. (p. 137)

El Álgebra de Bombelli (1572)



“He encontrado otro tipo de R.c. ‘legate’ muy distintas de las otras, que surge del Capítulo del cubo igual a la cantidad y el número $[x^3 = bx + c]$ cuando el cubo de la tercera parte de la cantidad es mayor que el cuadrado de la mitad del número [...] su exceso no se debe llamar ni ‘più’ ni ‘meno’, sino que lo llamaremos ‘più di meno’ $[+\sqrt{-1}]$ cuando se tenga que sumar, cuando se tenga que extraer lo llamaremos ‘men di meno’ $[-\sqrt{-1}]$ [...]”

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}$$



Rafael Bombelli

L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica,
1572. (p. 169)

Ho trouato un'altra sorte di R.c. legate molto differen-
ti dall'altre, laqual nasce dal Capitolo di cubo eguale
à tanti, e numero, quando il cubato del terzo delli tan-
ti è maggiore del quadrato della metà del numero co-
me in esso Capitolo si dimostrerà, laqual sorte di R. q.
hà nel suo Algorismo diuersa operatione dall'altre, e
diuerso nome; per che quando il cubato del terzo del
li tanti è maggiore del quadrato della metà del nume-
ro; lo eccello loro non si può chiamare ne più, ne me-
no, però lo chiamarò più di meno, quando egli si doue
rà aggiungere, e quando si douerà cauare, lo chie-
rò men di meno, e questa operatione è necessarissima
più che l'altre R.c. L. per rispetto delli Capitoli di po-
tenze di potèze, accompagnati cō li cubi, ò tanti, ò con
tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'ag-
guagliare doue ne nasce questa sorte di R. che quel-
li doue nasce l'altra, la quale parerà à molti più tosto
fossitica, che reale, e tale opinione hò tenuto anch'io,
fin' che hò trouato la sua dimostratione in linee (come
si dimostrerà nella dimostratione del detto Capitolo
in superficie piana) e prima tratterò del Moltiplicare,
ponendo la regola del più & meno.

Più uia più di meno, fa più di meno.
Meno uia più di meno, fa meno di meno.
Più uia meno di meno, fa meno di meno.
Meno uia meno di meno, fa più di meno.
Più di meno uia più di meno, fa meno.
Più di meno uia men di meno, fa più.
Meno di meno uia più di meno, fa più.
Meno di meno uia men di meno fa meno.

$$+(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$$

$$-(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$

$$+(-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$

$$-(-\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1}$$

$$(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = -$$

$$(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = +$$

$$(-\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = +$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -$$

- Bombelli en el Libro 2 presenta una ecuación de grado 3, $x^3 = 15x + 4$, donde una de las soluciones claramente es real: 4 (las otras dos también: $x = -2 + \sqrt{3}$, $x = -2 - \sqrt{3}$).
- Pero en cambio, si aplicamos la fórmula el resultado nos da una expresión ¡imaginaria!:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

- ¿Cómo conciliar la fórmula, que nos da una solución imaginaria, con el hecho de que sabemos que las soluciones son reales?
- Este es el punto clave, y lo que impulsará el tratar de comprender estos objetos, y no solo desecharlos.

- Bombelli en el Libro 1 establece las herramientas necesarias para poder abordar este tipo de problemas, entre ellas, el cálculo de raíces cúbicas de expresiones del tipo $a + \sqrt{b}$.
- Pero, y esto es lo más destacable, también de expresiones del tipo $a + \sqrt{-b}$, siendo uno de los ejemplos, precisamente, el determinar el valor de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$.
- Basándose en casos “reales”, asume, generalizando al caso imaginario, que esa raíz cúbica será de la forma:

$$p + \sqrt{-q} = p + \sqrt{q}\sqrt{-1}$$

- Bombelli en el Libro 1 establece las herramientas necesarias para poder abordar este tipo de problemas, entre ellas, el cálculo de raíces cúbicas de expresiones del tipo $a + \sqrt{b}$.
- Pero, y esto es lo más destacable, también de expresiones del tipo $a + \sqrt{-b}$, siendo uno de los ejemplos, precisamente, el determinar el valor de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$.
- Basándose en casos “reales”, asume, generalizando al caso imaginario, que esa raíz cúbica será de la forma:

$$p + \sqrt{-q} = p + \sqrt{q}\sqrt{-1}$$

Queriendo encontrar el lado cúbico de una especie similar de raíces en la práctica, se seguirá este método. Suma el cuadrado del número con el cuadrado de la raíz, y de la suma toma la raíz cúbica.

Es decir...

$$2^2 + \left(\sqrt{121}\right)^2 = 125$$

$$\sqrt[3]{2^2 + \left(\sqrt{121}\right)^2} = 5$$

$$2^2 + \left(\sqrt{121}\right)^2 = 125$$

$$\sqrt[3]{2^2 + \left(\sqrt{121}\right)^2} = 5$$

Luego, intenta por ensayo encontrar un número y una raíz cuadrada tal que sus cuadrados sumados juntos den como resultado lo mismo que la raíz cúbica mencionada anteriormente. Y que, al cubar el número, restando el triple de la multiplicación del número por el cuadrado de la raíz cuadrada, lo que queda sea el número del lado que se busca.

Es decir... hay que encontrar p y q tales que:

$$p^2 + q = 5$$

$$p^3 - 3pq = 2$$

$$\begin{aligned}p^2 + q &= 5 \\ p^3 - 3pq &= 2\end{aligned}$$

Para la búsqueda, menciona el número (es decir, de p), que su cuadrado ha de ser menor que 5 (primera ecuación) y su cubo menor que 2 (segunda ecuación). Un tanteo rápido nos lleva a ambos valores:

$$\begin{aligned} p^2 + q &= 5 \\ p^3 - 3pq &= 2 \end{aligned}$$

Para la búsqueda, menciona del número (es decir, de p), que su cuadrado ha de ser menor que 5 (primera ecuación) y su cubo menor que 2 (segunda ecuación). Un tanteo rápido nos lleva a ambos valores:

$$\begin{aligned} p &= 2 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

con lo que la raíz es: $2 + \sqrt{-1}$.



Rafael Bombelli

L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica,
1572 (pp. 180-181).

Volviendo a la ecuación, una vez obtenido este valor en el problema, es claro que la segunda parte de la solución tiene que ser su conjugado para que la suma encaje.

- Por lo tanto:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

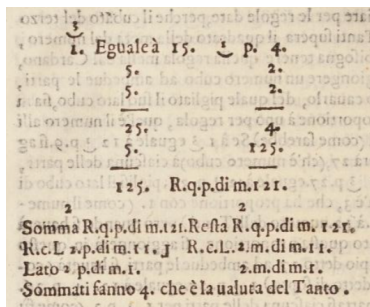
- Y la suma de ambos, que era la solución que nos proporcionaba la fórmula de Cardano, da efectivamente 4.



Rafael Bombelli

L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica,
1572 (pp. 180-181.).

Diagrama:



Explicación:

Ancora si può procedere nella agguagliatione di tal Capitolo in questa guisa. Agguagli si 1 3 à 15. 3. p. 4. pigli si il terzo delli Tanti, che è 5, cubifi fa 125, e questo si caui del quadrato della metà del numero, ch'è 4, resta m. 121 (ilqual si chiamerà più di meno) che di questo pigliata la R.q. farà p. di m. 121, che aggiunta con la metà del numero, fa 2. p. di m. 121, che pigliatone il lato cubico, ed'aggiunto col suo residuo, fa 2.p. di m. 121. & 2.m. di m. 121. che giunti insieme fanno 4. e 4. è la ualuta del Tanto. Et benchè à molti parerà questa cosa strana, perche di questa opinione fui ancho già vn tempo parendomi più tosto fosse sofistica, che uerità, nondimeno

$$\text{Paso 1} \rightarrow \frac{15}{3} = 5$$

$$\text{Paso 2} \rightarrow \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 125$$

$$\text{Paso 3} \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{5}\right)^3 = -121$$

$$\text{Paso 4} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{5}\right)^3} = 11\sqrt{-1}$$

$$\text{Paso 5} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{5}\right)^3} + \left(\frac{4}{2}\right) = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$\text{Paso 6} \rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{5}\right)^3} + \left(\frac{4}{2}\right)} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Y ahora, lo que afirma es que:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

con lo que efectivamente la suma da 4.

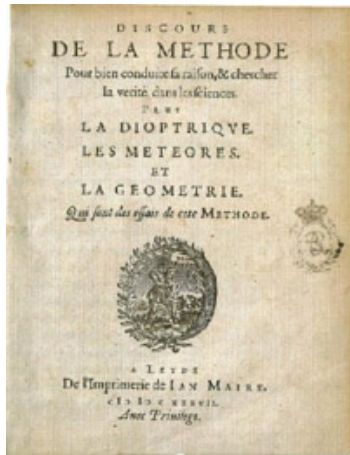
Y aunque a muchos les parecerá esta cosa extravagante, porque de esta opinión fui también yo un tiempo, pareciéndome más bien que fuese sofística que verdadera, sin embargo, tanto busqué que encontré la demostración [...]



Rafael Bombelli

L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica,
1572 (pp. 293-294.).

“Finalmente” adquirieron el nombre con el que se les conocerá en un futuro



estoiēt $\frac{1}{2}$, 1, & $\frac{4}{9}$, & que celles de la premiere estoient $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{9}$.

Cōment
on rend la
quantité
connue
de l'un
des ter-
mes d'une
Equation
égale à
celle autre
qu'on
veut.

Cete operation peut aussi seruir pour rendre la quantité connue de quelqu'un des termes de l'Equation esgale à quelque autre donnée, comme si ayant

On veut auoir en sa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connue, du terme qui occupe la troisieme place, a sçauoir celle qui est icy bb , soit $3a$, il faut suppo-

ser $y \propto \sqrt{\frac{1aa}{bb}}$, puis escrire $y^2 \propto \frac{1aa}{bb}$, il faut suppo-

Que les
racines,
tant vra-
yes que
fausses,
peuvent
estre reel-
les ou
imaginai-
res.

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est à dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que iay dit en chaque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle cy, $x^3 - 6xx - 13x - 10 \propto 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

La redu-
ction des
Equations
cubiques
lorsque le
problème
est en
plan.

Or quand pour trouuer la construction de quelque problème, on vient à vne Equation, en laquelle la quantité inconnue a trois dimensions; premierement si les quantités connues, qui y sont, contiennent quelques nombres rompus, il les faut reduire à d'autres entiers, par la multiplication tantost expliquée. Et s'ils en contiennent de sours, il faut aussi les reduire à d'autres rationaux, autant qu'il sera possible, tant par cete mesme multiplication,

“Por lo demás, tanto las verdaderas raíces como las falsas no siempre son reales; mas algunas veces solamente *imaginarias*; es decir, podemos perfectamente imaginar en cada ecuación tantas como he establecido, pero algunas veces no hay ninguna cantidad que corresponda a las que imaginamos.”

En definitiva, un nuevo tipo de número reclama su lugar. Si cogemos los casos que han aparecido hasta ahora:

$$5 \pm \sqrt{-2} = 5 \pm \sqrt{2 \cdot (-1)} = 5 \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$$

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{15 \cdot (-1)} = 5 \pm \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1}$$

$$2 + \sqrt{-121} = 2 + \sqrt{121 \cdot (-1)} = 2 + 11 \cdot \sqrt{-1}$$

Es claro cuál es el patrón:

$$a + b \cdot \sqrt{-1}$$

Conclusión/Objetivo

- No hay necesidad de considerar como lícito un nuevo tipo de “*cosa recóndita*” porque haya ecuaciones de grado 2 “irresolubles” (no hay solución real si la fórmula no es real):
 - El problema se considera mal planteado.
 - El problema se considera imposible.
 - La ecuación se puede resolver de manera “sofística”.
- La necesidad surge de las ecuaciones de grado 3, puesto que algunas tienen soluciones reales aunque la fórmula no sea real. El manejo se hace, generalizando, tomando como base las operaciones con cosas lícitas.



El número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser.

(Leibniz)

EPÍLOGO

¡OJO! (con la forma)

SCHOLIE.

§. 124, Puisque donc toutes ces quantités imaginaires, qui sont formées par des opérations transcendentes sont aussi comprises dans la forme générale $M + N \sqrt{-1}$, nous pourrons soutenir sans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelques compliquées qu'elles puissent être, sont toujours réductibles à la forme $M + N \sqrt{-1}$; ou qu'elles sont toujours composées de deux membres, donc l'un est réel, & l'autre une quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.



Leonhard Euler

Recherches sur les racines imaginaires
des équations (E170),

*Mémoires de l'académie des sciences de
Berlin* 5 (1749) 1751, pp. 222–288 (p.
288.).

¡OJO! (con el fondo)

Capitolo di potenze, e numero eguali à Tanti.

Quando si hauerà da agguagliare potenze, e numero à Tanti. Piglisi la metà delli Tanti, e quadrifi, e del prodotto si caui il numero, e del restante se ne pigli il lato, e si aggiunge, ouero si caua della metà delli Tanti, e la somma, ouer restante farà la ualuta del Tanto. Ma auertiscasi che ne i quesiti alcuna uolta (bêche di rado) il restante nõ serue, ma bene si la somma sempre. Auertendosi, che se il numero non si potrà cauare del quadrato della metà delli Tanti, tale agguagliatione non si potrà fare, il che non farà difetto del capitolo, ma del problema, che tratterà dell'impofsibile, ouero dal non hauer saputo far la positione, e dell'uno, e dell'altro ponerò l'esempio, e prima. Agguagli si $x^2 + 10 = 8x$. Piglisi il mezzo delli Tanti, che 4. il suo quadrato è 16, che cauato 10, resta 4, ch'il suo lato è 2, e questo si aggiunge, ouer si caua di 4 (che aggiungendolo farà 6, e cauandolo farà 2,) che in l'uno, e l'altro modo si hauerà la ualuta del tanto, e questo è quanto al primo esempio.

Ma se si hauerà ad agguagliare $x^2 + 10 = 8x$, che il quadrato della metà delli Tanti è 16. qual è minore di 10, e questo agguagliamento non si può fare se non in questo modo sofistico. Cauasi 10. di 16. resta 6. il



Rafael Bombelli

L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica,
1572 (p. 262).

$$x^2 + b = ax \rightarrow x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

En adelante, los números complejos reaparecerán mostrando su inesperada utilidad en ramas como el cálculo o la teoría de números. En cualquier caso, su estatus continuará siendo problemático.

Algunos grandes nombres asociados a estos “números” son:

- Leibniz (1646–1716).
- Huygens (1629–1695).
- Wallis (1616–1703).
- Wessel (1745–1818), Argrand (1768–1822), Buée (1745–1825).
- Euler (1707–1783): $i = \sqrt{-1}$
- Gauss (1777–1855): “números complejos”
- Cauchy (1789–1857).
- Hamilton (1805–1865).

Leibniz y Huygens



$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

“No recuerdo haber notado un hecho tan singular y paradójico en todo el análisis” ($L \rightarrow H$).

“Uno nunca lo hubiese creído, y hay algo oculto en esto que es incomprensible para nosotros” ($H \rightarrow L$).

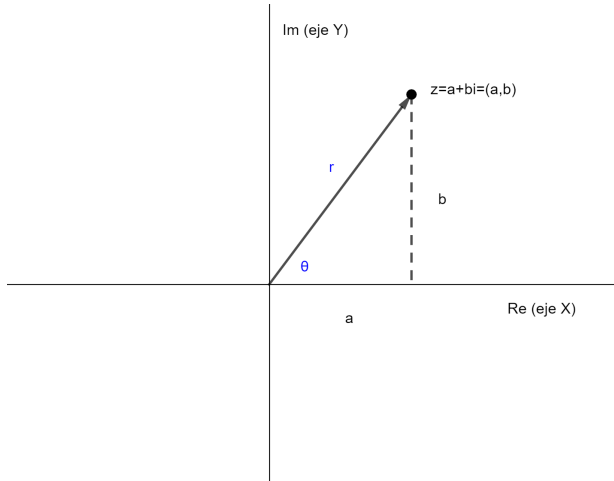


R. B. McClenon

*A Contribution of Leibniz to the History of
Complex Numbers,*
AMM, Vol. 30, No 7, pp. 369–374 (p. 370,
372).

Interpretación

- Caspar Wessel (1797/1799).
- Jean-Robert Argand (1806).
- Carl Gauss (1796/1831). Su implicación fue definitiva.



La autoridad de Gauss fue clave de cara a la aceptación de estos nuevos números.



Se podría decir en todo esto que, mientras las cantidades imaginarias todavía se basaban en una ficción, no fueron, por así decirlo, plenamente aceptadas en matemáticas, sino que se consideraban más bien como algo que debía ser tolerado; no se les dio el mismo estatus que a las cantidades reales [...]



[...] Ya no hay justificación para tal discriminación ahora que la metafísica de los números imaginarios ha sido esclarecida y se ha demostrado que tienen un significado real objetivo tan válido como los números negativos.



Ebbinghaus, H.D. (et al.)
Numbers.
Springer, 1995. (p. 62)

No te debemos poco...



$a \neq 0$ algebraico $\implies e^a$ trascendente

Ahora bien, como: $e^{i \cdot \pi} = -1$ no es trascendente...

π no puede ser algebraico

No se puede cuadrar el círculo (Wantzel).