La Matemática a través de sus textos

Qué, quién y cómo

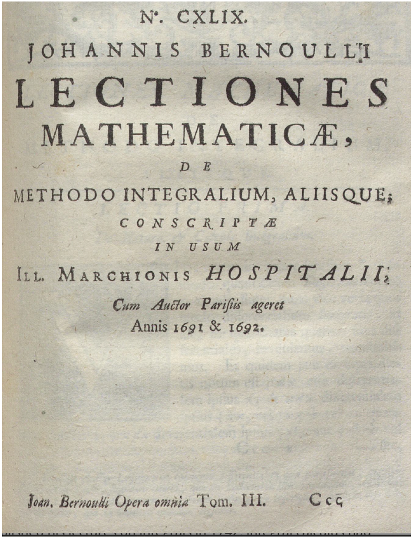
1ª Escuela de Verano CEMat en Historia de las Matemáticas: estudio, aplicaciones y enseñanza

Eduardo Dorrego y Antonio Mellado

CEMat
IMU
Comité Español de Matemáticas

CASO 1
EL PROBLEMA DE LA CATENARIA RESUELTO (1691) POR JOHANN BERNOULLI

Lectiones de Methodo Integralium (1742)



N°. CXLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

LECTIONES

MATHEMATICÆ,

DE

METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE;

CONSCRIPTÆ

IN USUM

ILL. MARCHIONIS *HOSPITALII;*

Cum Auctor Parisiis ageret

Annis 1691 & 1692.

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. III. Ccc

Lección 36. La forma de la curva catenaria

LECTIO TRIGESIMA SEXTA.

De Curvis Funiculariis vel Catenariis.

QUantum utilitatis Problema lineæ Catenariæ in Geometria obtineat, videre eſt ex tribus ſolutionibus *Actis Lipſienſibus* anni præteriti (1691) inſertis, & præcipue ex iis quæ Celeb: LEIBNITIUS ibi annotat. Primus qui de iſta curva a filo, vel potius catenula quæ non eſt extenſibilis, libere pendente formata cogitavit, fuit GALILÆUS; naturam autem ejus non penetravit, utpote qui Parabolam eſſe ſtatuit, quæ tamen minime eſt. *Joachimus* JUNGIUS, ut animadvertit Dnus. LEIBNITIUS, per calculum & multa experimenta inſtituta, comperiit non eſſe Parabolam; interim veram curvam non aſſignavit. Solutio itaque eximii hujus Problematis ad noſtrum uſque tempus reſervata fuit; quam, una cum calculo qui in *Actis* ſolutioni* non adjungitur, hic exhibemus. Curva interim catenaria duplex eſt, vel vulgaris, quæ formatur a filo vel catena æqualiter craſſa, ſeu in omnibus ſuis punctis æqualiter gravata; vel non vulgaris, quæ nempe formatur a filo inæqualiter craſſo, id eſt, quod in omnibus ſuis punctis inæqualiter eſt gravatum, & quidem in ratione

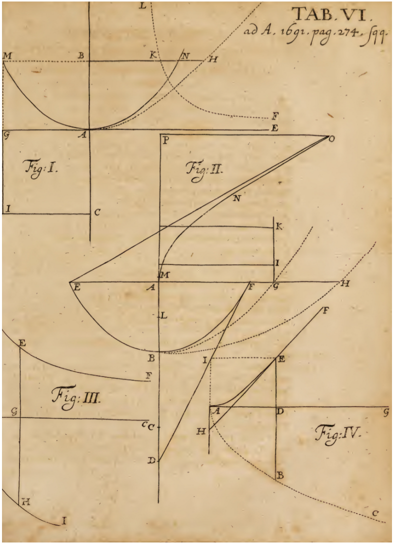
* Vid. Nus. IV. pag. 48, *Tom. I.* Qqq 2 appli-

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULARII, exhibita a Johanne Bernoulli, Baſil. Med. Cand.

ANnus fere eſt, cum inter ſermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidiſſet de Natura Curvæ, quam funis inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus format. Mirabamur rem omnium oculis & manibus quotidie expoſitam nullius hucusque attentionem in ſe concitaſſe. Problema videbatur eximium & utile, at tum ob præviſam difficultatem tangere noluimus; ſtatuimus itaque illud publice Eruditis proponere, viſuri num qui vadum tentare auderent: neſciebamus enim, quod jam inde a Galilæi temporibus inter Geometras agitatum fuiſſet. Interea dignum cenſuit nodum hunc, cui ſolvendo ſe accingeret ſummus Geometra Leibnitius, ſignificavitque non multo poſt (vid. Act. a. 1690. mens. Jul. pag. 360) ſe clave ſua aditus problematis feliciter reſeraſſe, conceſſo tamen & aliis tempore, intra quod ſi nemo ſolveret, ipſe ſolutionem ſuam publicaturus eſſet. Id animum addidit, ut problema denuo aggrederer, quod eo quidem cum ſucceſſu factum, ut brevi & ante termini a Viro Cel. poſiti exitum ejus ſolutionem omnimodam & plenariam, qualem antea ne ſperare quidem auſus fuiſſem, invenerim. Reperi autem Curvam noſtram Funiculariam non eſſe Geometricam, ſed ex earum cenſu, quæ Mechanicæ dicuntur, utpote cujus natura determinata æquatione Algebraica exprimi nequit, nec niſi per relationem curvæ ad rectam, vel ſpatii curvilinei ad rectilineum habetur, ſic ut ad illam deſcribendam alterius curvæ rectificatio vel curvilinei quadratura ſupponatur, ut ex ſequentibus Conſtructionibus
TAB. VI. liquet:

Fig. I. *Conſtr. I.* Ductis normalibus CB, DE ſeſe ſecantibus in A, centroque C ubivis ſumpto in axe CB, & vertice A deſcripta Hyperbola æquilatera AH, conſtruatur curva LKF, quæ talis ſit, ut ubique CA ſit media proportionalis inter BH & BK; fiat rectangulum CG æquale ſpatio EABKF, erit productis IG, HB punctum concurſus M in Curva Funicularia MAN.

Fig. II. *Conſtr. II.* Deſcripta ut prius ad axem BA Hyperbola æquilatera BG, conſtruatur ad eundem axem Parabola BH, cujus latus rectum æquetur quadruplo lateris recti vel tranſverſi Hyperbolæ, ordinatimque



MENSIS JUNII A. M DC XCI. 275

natimque applicata HA producatur ad E, ita ut recta GE ſit æqualis lineæ Parabolicæ BH; dico punctum E eſſe in Curva Funicularia EBF.

Ex his patet, Curvæ hujus EBF naturam per æquationem Geometricam haberi non poſſe, niſi ſimul rectificatio lineæ Parabolicæ detur. Hujus autem & præcedentis Conſtructionis demonſtrationem lubens omitto, ne Celeberrimo Viro primæ inventionis palmam vel præripiam, vel inventa ſua ſuper hac materia plane ſupprimendi anſam præbeam: ſufficiet hic, ſi notabiliores hujus Curvæ proprietates addidero:

1. Ducta tangente FD, erit AF. AD :: BC. BF curvam. Fig. II.
2. AE vel AF æquatur curvæ Paraboſicæ BH dempta recta AG.
3. Curva BE vel BF æqualis eſt rectæ AG, i. e. portiones curvæ funiculariæ ad axem applicatæ conficiunt Hyperbolam æquilateram: inſignis eſt hujus Curvæ proprietas.
4. Spatium Funicularium BAE vel BAF eſt æquale rectangulo ſub BA & AF, diminuto rectangulo ſub CB & FG.
5. Curva MNO, ex cujus evolutione deſcribitur Funicularia, BE, eſt tertia proportionalis ad CB & AG.
6. Recta vero evolvens EO eſt tertia proportionalis ad CB & CA.
7. Recta BM usque ad principium curvæ MNO ſumta æquatur ipſi CB.
8. MP eſt dupla ipſius BA.
9. Rectangulum ſub CB & PO duplum eſt ſpatii hyperbolici ABG.
10. Recta CP biſecta eſt in puncto A.
11. Curva EB eſt ad curvam MNO, ut recta CB ad rectam AG.
12. Si ad AG applicentur duo Rectangula AI, AK, quorum unum AI ei quod ſub ſemilatere transverſo CB & recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK quod ipſi ſpatio Hyperbolico BGA æquatur; & differentiæ latitudinum KI ſumatur in axe a vertice B æqualis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvæ Funiculariæ EBF.
13. Si ſuper EF infinitæ intelligantur deſcriptæ curvæ ipſi Funiculariæ EBF æquales, illæque in rectas extendantur, & in ſingulis ſingulæ extenſæ punctis applicentur rectæ ipſis reſpective diſtantiis a linea EF æquales, erit omnium ſpatiorum quæ ſic efficiuntur illud quod a Funicularia gignitur maximum.

Mm 2 Cœpit

276 ACTA ERUDITORUM

Cœpit Hon. Frater ſpeculationem hanc extendere etiam ad funes inæqualiter craſſos, quorum craſſities ad longitudinem relationem obtinet æquatione algebraica exprimibilem, notatque unum caſum, quo problema per Curvam ſimplicem Mechanicam ſolvi poſſit: nempe ſi ſupponatur Figura Curvilinea ABDEG, cujus applicata GE ſit reciproce in dimidiata ratione abſciſſæ AG, eaque ſit in omnibus ſuis applicatis flexilis, hoc eſt, ſi concipiatur funis AG gravatus in ſingulis ſuis punctis reſpectivis rectis GE, vel (quod tantundem eſt) differentiis applicatarum GH in Parabola AHI, aut denique portiunculis curvæ cycloidalis AHI (cujus vertex A) isque ſic gravatus ſuſpendi intelligatur, ita ut punctum A ſit omnium infimum (quod fit, ubi connexum habuerit a parte A alium funem ejusdem longitudinis & in æqualibus a puncto A diſtantiis æqualiter gravatum): tum jubet ad axem AG conſtruere Hyperbolam æquilateram ABC cujus vertex A, applicatamque BD producere ad E, ita ut rectangulum ſub ſemilatere recto vel transverſo & linea DE, ſit æquale ſpatio ADB; oſtenditque punctum E eſſe ad curvam quæſitam AEF, quam funis dicta ratione gravatus format, ipſam vero curvam AE eſſe tertiam proportionalem ad rectum vel transverſum latus Hyperbolæ & applicatam ejus DB; tangentem EH haberi ſumpta IH quarta proportionali ad ſemilatus rectum, abſciſſam AD & applicatam DB, &c. Reperi autem, quod memorabile eſt, curvam hanc AEF illam ipſam eſſe, ex cujus evolutione altera BE, quam uniformis craſſitiei funis format, deſcribitur; adeoque eandem cum curva MNO.

Fig. III.

Fig. IV.

Fig. II. Notare convenit, quod ſi quis experimentis hæc examinare inſtituat, catenulam præ fune ſeligere debeat, quem ob nimiam cum levitatem tum rigiditatem ad id ineptum deprehendimus. Cæterum qui materiam hanc perficere & ampliare volet, poterit inveſtigare naturam curvæ, quam refert funis in hypotheſi a Terræ centro diſtantiæ finitæ, vel ſi ſupponatur inſuper a proprio pondere extenſibilis, aut quocunque alio modó gravatus: vel etiam vice verſa qualiter illum gravare conveniat, ut referat lineam Parabolicam, Hyberbolicam, Circularem aliamve quamcunque datam curvam: Res enim omnino in poteſtate eſt.

DE

CASO 2

Ejemplo (YBC 6967)

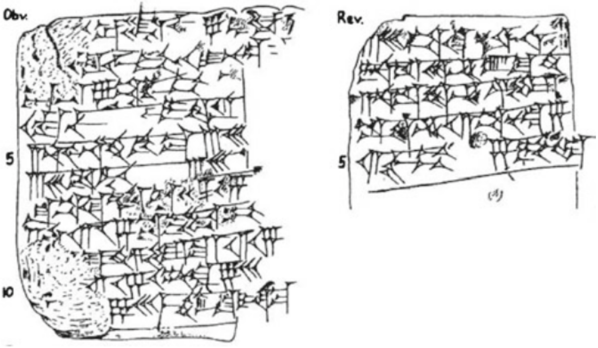
MCT 129 artifact entry (No. P255041). (2023, February 1)
Cuneiform Digital Library Initiative (CDLI), https://cdli.ucla.edu/P255041.

Ejemplo (YBC 6967)

Obverse

Reverse

Ejemplo (YBC 6967)

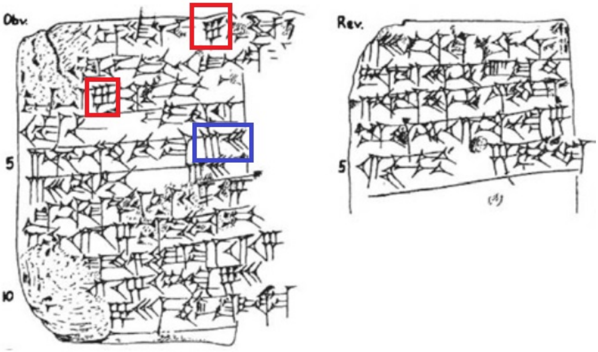


Obverse

Reverse

- Un recíproco excede a su recíproco en 7.
- ¿Cuáles son el recíproco y su recíproco?
- Tú: divide en dos el 7 mediante el cual el recíproco excede a su recíproco, y obtendrás 3.30

Ejemplo (YBC 6967)

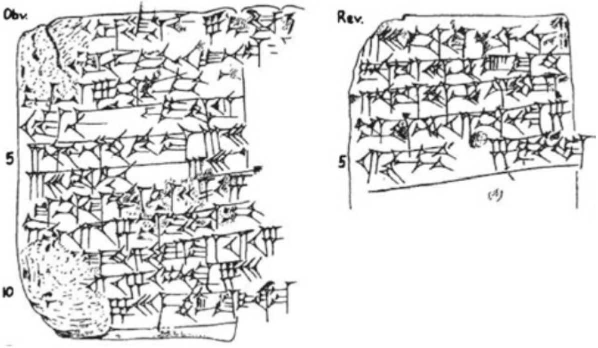


Obverse

Reverse

- Un recíproco excede a su recíproco en 7.
- ¿Cuáles son el recíproco y su recíproco?
- Tú: divide en dos el 7 mediante el cual el recíproco excede a su recíproco, y obtendrás 3.30

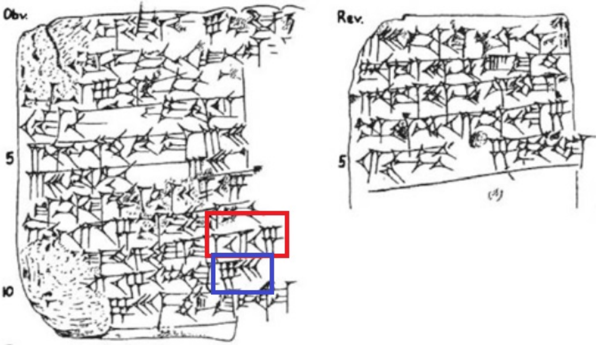
Ejemplo (YBC 6967)



Obverse Reverse

- Multiplica 3.30 por 3.30 y obtendrás 12.15.
- Añade 1, el área, al 12.15 que obtuviste y entonces obtendrás 1 12.15.
- ¿Cuál es el ladoigual de 1 12.15? 8.30.

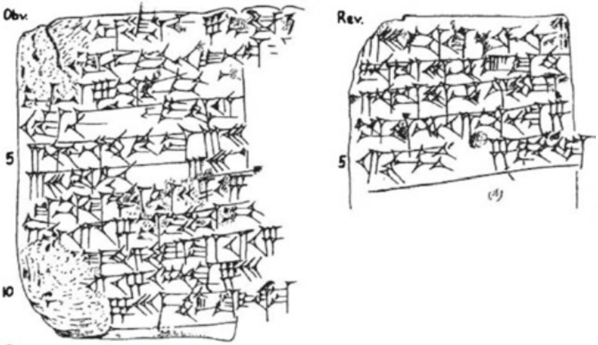
Ejemplo (YBC 6967)



Obverse Reverse

- Multiplica 3.30 por 3.30 y obtendrás 12.15.
- Añade 1, el área, al 12.15 que obtuviste y entonces obtendrás 1 12.15.
- ¿Cuál es el ladoigual de 1 12.15? 8.30.

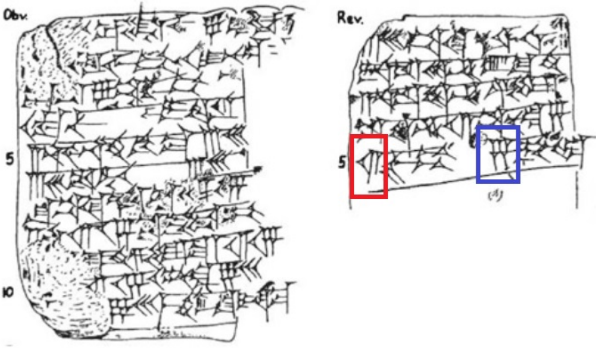
Ejemplo (YBC 6967)



Obverse Reverse

- Coloca 8.30 y 8.30, su equivalente, y resta 3.30 de uno de ellos.
- Añade 3.30 a uno de ellos.
- 12 es el recíproco, 5 es el recíproco.

Ejemplo (YBC 6967)



Obverse Reverse

- Coloca 8.30 y 8.30, su equivalente, y resta 3.30 de uno de ellos.
- Añade 3.30 a uno de ellos.
- 12 es el recíproco, 5 es el recíproco.

En resumen

- Un recíproco excede a su recíproco en 7.
- ¿Cuáles son el recíproco y su recíproco?
- Tú: divide en dos el 7 mediante el cual el recíproco excede a su recíproco, y obtendrás 3.30
- Multiplica 3.30 por 3.30 y obtendrás 12.15.
- Añade 1, el área, al 12.15 que obtuviste y entonces obtendrás 1 12.15.
- ¿Cuál es el ladoigual de 1 12.15? 8.30.
- Coloca 8.30 y 8.30, su equivalente, y resta 3.30 de uno de ellos.
- Añade 3.30 a uno de ellos.
- 12 es el recíproco, 5 es el recíproco.

En resumen

- Un recíproco excede a su recíproco en 7.
- ¿Cuáles son el recíproco y su recíproco?
- Tú: divide en dos el 7 mediante el cual el recíproco excede a su recíproco, y obtendrás 3.5
- Multiplica 3.5 por 3.5 y obtendrás 12.25.
- Añade 60, el área, al 12.25 que obtuviste y entonces obtendrás 60+12.25.
- ¿Cuál es el ladoigual de 60+12.25? 8.5.
- Coloca 8.5 y 8.5, su equivalente, y resta 3.5 de uno de ellos.
- Añade 3.5 a uno de ellos.
- 12 es el recíproco, 5 es el recíproco.

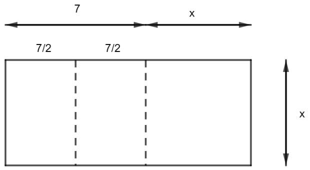
<u>En lenguaje moderno</u>

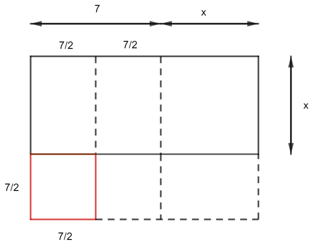
Un número excede a otro en 7. Cuál es el valor de ambos si su producto es 60 $\rightarrow\ x \cdot (x+7) = 60$

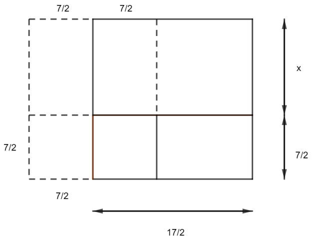
<u>Solución</u>

- Divide en dos 7, resultando 3.5 ($\frac{7}{2}$).
- Multiplica 3.5 por sí mismo; resultado $(\frac{7}{2})^2$.
- Añade el <u>área</u> (60) a $(\frac{7}{2})^2$; resultado $\frac{289}{4}$.
- ¿Cuál es el <u>lado del cuadrado</u>? $\frac{17}{2}$.
- Réstale $\frac{7}{2}$.
- Un número es 12 y el otro 5.

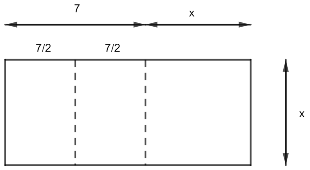
Posible método (geometría)

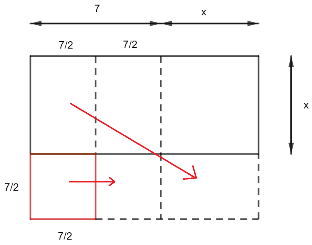


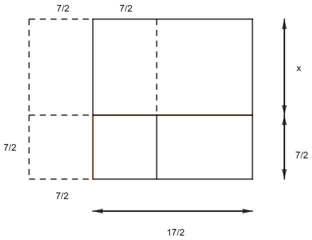




Posible método (geometría)







En lenguaje moderno

Un número excede a otro en 7. Cuál es el valor de ambos si su producto es 60 $\rightarrow\ x \cdot (x+7) = 60$

Solución

- Divide en dos 7, resultando 3.5 ($\frac{7}{2}$).
- Multiplica 3.5 por sí mismo; resultado $(\frac{7}{2})^2$.
- Añade el área (60) a $(\frac{7}{2})^2$; resultado $\frac{289}{4}$.
- ¿Cuál es el lado del cuadrado? $\frac{17}{2}$.
- Réstale $\frac{7}{2}$.
- Un número es 12 y el otro 5.

En lenguaje moderno

Un número excede a otro en 7. Cuál es el valor de ambos si su producto es 60 $\rightarrow\ x \cdot (x+7) = 60$

Solución

- Divide en dos 7, resultando 3.5 $(\frac{7}{2})$.
- Multiplica 3.5 por sí mismo; resultado $(\frac{7}{2})^2$.
- Añade el área (60) a $(\frac{7}{2})^2$; resultado $\frac{289}{4} = 60 + (\frac{7}{2})^2$.
- ¿Cuál es el lado del cuadrado? $\frac{17}{2} = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2}$.
- Réstale $\frac{7}{2} = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2} - \frac{7}{2}$.
- Un número es 12 y el otro 5.

Equivalencia algebraica (fórmula)

$$x^2 + 7x = 60$$

Si aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Equivalencia algebraica (fórmula)

$$x^2 + 7x = 60$$

Si aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Si aplicamos el método babilónico:

$$x = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2} - \frac{7}{2}$$

Equivalencia algebraica (fórmula)

$$x^2 + 7x = 60$$

Si aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Si aplicamos el método babilónico:

$$x = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 60}$$

Equivalencia algebraica (fórmula)

$$x^2 + 7x = 60$$

Si aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Si aplicamos el método babilónico:

$$x = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 60} =$$

$$-\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{7^2 + 4 \cdot 60}{4}}$$

Equivalencia algebraica (fórmula)

$$x^2 + 7x = 60$$

Si aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Si aplicamos el método babilónico:

$$x = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 60} =$$

$$-\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{7^2 + 4 \cdot 60}{4}} = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Equivalencia algebraica (fórmula)

$$x^2 + 7x = 60$$

Si aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

Si aplicamos el método babilónico:

$$x = \sqrt{60 + (\frac{7}{2})^2} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 60} =$$

$$-\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{7^2 + 4 \cdot 60}{4}} = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2} = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4 \cdot 60}}{2}$$

CASO 3

A C, ou P G, au gnomon P O B A, d'ou s'ensuit que six quarrez de A B, excedent à six quarrez de A C, en six gnomons P O B A, &c.

PROBLEME LXIX.

Estant donnez trois termes, desquels le premier ③, le second ①⓪, le troisiesme nombre algebraique quelconque: Trouver leur quatriesme terme proportionel.

①+⓪
—①+⓪
①—⓪

NOTA. Le binomie du second terme donné de ce probleme, se peut rencontrer en trois differences, à sçavoir:

Lesquelles trois differences nous declarerons separeement.

PREMIERE DIFFERENCE DE SECOND TERME ①+⓪.

Explication du donné. Soyent donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ③, le second 6 ①+ 40, le troisiesme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

Le quarré de la moitie de 40 donné, est	400
Du mesme soubstraict le cube de 2 (tiers de 6 de 6 ①) qui est 8, reste 392, sa racine √392, qui adjoustée à 20, moitie de 40 donnez, faict	20 + √392
Sa racine cubique est	√③ *bino.* 20 + √392
A laquelle adjousté son respondant binomie disioinct comme	√③ *bino.* 20 — √392
Donne somme	√③ *bino.* 20 + √392 + √③ *bino.* 20 — √392

Laquelle je di estre le quatriesme terme proportionel requis.

requis. *Demonstration Arithmetique.* Si la conversion du multinomie de ceste solution en nombre Arith. fust legitimement inventée (quand il sera possible comme icy) ce seroit singuliere invention, servant autant aux problemes suivans, comme a cestui-cy; & le trouverions valoir 4, par lequel nous pouvons faire demonstration, mettant soubs chascun terme sa valeur en ceste sorte:

1③.	6①+ 40.	1①.	4.
64	64.	4.	4.

Et appert que 4 est leur quatriesme terme proportionel.

Quant à l'addition, que nous avons dict generale, par le moyen du theoreme du 24 probleme; à sçavoir que multipliant le quotient des deux racines cubiques plus un, par le diviseur; Elle ne nous faille en rien, mais parce que les parties sont incommensurables, à la fin nous reviennent les mesmes deux racines cubiques des binomies donnez.

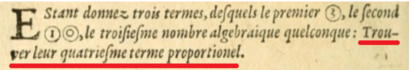
Mais pour trouver ce 4 terme en nombre absolus, parfaictement ou si pres que l'on veut, nous renvoyons le Lecteur à une reigle generale qui sera mise à la fin du 77. probleme suivant, ce qui servira non seulement icy, mais aussi à tous les problemes suivants jusques à la mesme reigle.

Preparation d'autre demonstration Geometrique.

Soyent à la figure du theoreme devant ce 69 probleme selon la precedente operation, deux cubes, L F 20 + √392, & C H N 20 — √392, leur somme est 40, & leur produict 8; Doncques le costé D F, ou A C, faict √③ *bino.* 20 + √392, & le costé C B, faict √③ *bino.* 20 — √392, lesquels deux costez A C, & C B, adjoustez, font pour le costé A B, du cube A E, √③ *bino.* 20 + √392 + √③

Explicación

Lo primero que hay que tener claro es que el autor no está sino hablando de ecuaciones, solo que con otro lenguaje: el de las proporciones.


EStant donnez trois termes, deſquels le premier ③, le ſecond ① ⓪, le troiſieſme nombre algebraique quelconque: Trouver leur quatrieſme terme proportionel.

En general: dados a, b, c, el cuarto proporcional x será tal que:

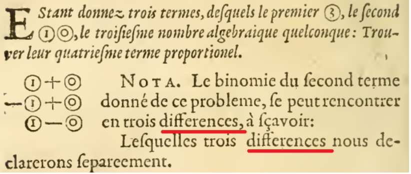
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \leftrightarrow ax = bc$$

En su caso: dados $x^3, ax + b, x$, el cuarto proporcional x será tal que:

$$\frac{x^3}{ax+b} = \frac{x}{x} = 1 \leftrightarrow x^3 = ax + b$$

Explicación

El autor, que es Stevin, explica en esta parte de su *L'Aritmetique* (1585) el modo de resolver la ecuación cúbica, pero lo va a hacer diferenciando tres casos (*differences*):



Eſtant donnez trois termes, deſquels le premier ③, le ſecond ①⓪, le troiſieſme nombre algebraique quelconque: Trouver leur quatrieſme terme proportionel.

①+⓪
−①+⓪
①−⓪

NOTA. Le binomie du ſecond terme donné de ce probleme, ſe peut rencontrer en trois differences, à ſçavoir:

Leſquelles trois differences nous declarerons ſeparement.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= ax + b \\
x^3 &= -ax + b \\
x^3 &= ax - b
\end{aligned}
$$

DE L'IMPERFECTION QU'IL Y A EN CESTE PREMIERE DIFFERENCE.

Il avient en aucuns exemples de ceſte difference, que le quarré de la moitie du ⓪ donné, ſera moindre que le cube du tiers du nombre de multitude de ① donnée; D'ou s'enſuit que le meſme cube, ne ſe pourra ſoubſtraire d'iceluy quarré, comme veut la reigle de la precedente conſtruction; de ſorte que ceſte premiere difference (enſemble aucuns exemples des problemes ſuivans, qui ſe convertiſſent en icelle) eſt encore imparfaicte. Rafael Bombelle la ſolve par diction de *plus de moins & moins de moins* en ceſte ſorte: Soyent les trois termes donnez, deſquels on requiert le quatrieſme proportionel, tels: le premier 1 ③, le ſecond 30 ① + 36, le troiſieſme 1 ①.

Conſtruction ſemblable à la precedente.

Le quarré de la moitie de 36 donné eſt 324

Du meſme ſoubſtraict le cube de 10 (tiers de 30 des 30 ① données) qui eſt 1000, reſte — 676, ſa racine + de — 26, qui ajouſté à 18, moitie des 36, faict 18 + de — 26

Sa

Sa racine cubique √③ *bino.* 18 + de — 26

A laquelle ajouſté ſon reſpondant binomie diſioinct, comme √③ *bino.* 18 — de — 26

Donne ſomme & ſolution √③ *bino.* 18 + de — 26 + √③ *bino.* 18 — de — 26.

Or ſi par les nombres de ceſte ſolution, l'on ſceuſt approcher infinement à 6 (car ils vallent preciſement autant) comme on faict par les nombres de la ſolution, du precedent premier exemple, certes ceſte difference ſeroit en ſa deſirée parfection.

Cardane met auſſi en ſon *Aliza* quelques exemples, ſervans à ceſte matiere, mais par generaux, ains à taſtons, par leſquels aprés grand travail, on ne peut ſouventesfois rien en effectuer. Quant à moy, j'eſtime inutile d'en eſcripre icy de ſemblables; La raiſon eſt, que ce qui ne ſe peut trouver par certaine reigle, ſemble indigne d'avoir lieu entre les propoſitions legitimes. D'autre part, que de ce qui ſe ſolve en telle maniere, la Fortune en merite autant d'honneur, comme l'efficient. Au tiers, qu'il y a aſſez de matiere legitime, voire en infini, pour s'en exercer, ſans s'occuper, & perdre le temps, en les incertaines: pourtant nous les paſſerons oultre. Ceux auſquels plairont tels exemples, ils en pourront faire à leur plaiſir.

Respecto a la primera *difference*, explica en esta parte de su *L'Aritmetique* el caso de aquellas ecuaciones cúbicas del tipo $x^3 = ax + b$ que llevan a radicandos negativos si se aplica la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

DE L'IMPERFECTION QU'IL Y A EN CESTE PREMIERE DIFFERENCE.

Il avient en aucuns exemples de ceſte difference, que le quarré de la moitie du 0 donné, ſera moindre que le cube du tiers du nombre de multitude de 1 donnée; D'ou s'enſuit que le meſme cube, ne ſe pourra ſoubſtraire d'iceluy quarré, comme veut la reigle de la precedente conſtruction; de ſorte que ceſte premiere difference (enſemble aucuns exemples des problemes ſuivans, qui ſe convertiſſent en icelle) eſt encore imparfaicte. Rafael Bombelle la ſolve par diction de *plus de moins* & *moins de moins* en ceſte ſorte: Soyent les trois termes donnez, deſquels on requiert le quatrieſme proportionel, tels: le premier 1 3, le ſecond 30 1 + 36, le troiſieſme 1 1.

faicte. Rafael Bombelle la ſolve par diction de *plus de moins* & *moins de moins* en ceſte ſorte: Soyent les trois termes donnez, deſquels on requiert le quatrieſme proportionel, tels: le premier 1 ③, le ſecond 30 ① + 36, le troiſieſme 1 ①.

Para explicar el procedimiento echa mano de la ecuación: $x^3 = 30x + 36$, cuya solución, que es 6, es también:

$$\sqrt[3]{18+26\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{18-26\sqrt{-1}}$$

288 LE II. LIVRE D'ARITH.

Sa racine cubique ✓ ③ *bino.* 18 + de — 26

A laquelle adiouſté ſon reſpondant binomie diſioinct, comme ✓ ③ *bino.* 18 — de — 26

Donne ſomme & ſolution ✓ ③ *bino.* 18 + de — 26

+ ✓ ③ *bino.* 18 — de — 26.

Conclusión: parece que Stevin no acoge bien estas “cosas inciertas”...

Sa racine cubique √ ③ *bino.* 18 + dc — 26
A laquelle adjouſté ſon reſpondant binomie
disioinct, comme √ ③ *bino.* 18 — dc — 26
Donne ſomme & ſolution √ ③ *bino.* 18 + dc — 26
+ √ ③ *bino.* 18 — dc — 26.

Or ſi par les nombres de ceſte ſolution, l'on ſceuſt approcher infinement à 6 (car ils vallent preciſement autant) comme on faict par les nombres de la ſolution, du precedent premier exemple, certes ceſte difference ſeroit en ſa deſirée parfection.

Cardane met auſſi en ſon *Aliza* quelques exemples, ſervans à ceſte matiere, mais par generaux, ains à taſtons, par leſquels aprés grand travail, on ne peut ſouventesfois rien en effectuer. Quant à moy, j'eſtime inutile d'en eſcripre icy de ſemblables; La raiſon eſt, que ce qui ne ſe peut trouver par certaine reigle, ſemble indigne d'avoir lieu entre les propoſitions legitimes. D'autre part, que de ce qui ſe ſolve en telle maniere, la Fortune en merite autant d'honneur, comme l'efficient. Au tiers, qu'il y a aſſez de matiere legitime, voire en infini, pour s'en exercer, ſans s'occuper, & perdre le temps, en les incertaines: pourtant nous les paſſerons oultre. Ceux auſquels plairont tels exemples, ils en pourront faire à leur plaiſir.

Ahora, si mediante los números de esta solución, pudiéramos aproximarnos infinitamente a 6 (pues es precisamente su valor) como se hizo mediante los números de la solución el anterior primer ejemplo, ciertamente esta diferencia [este subtipo de cúbicas] estaría en su deseada perfección.

Cardano pone en su Aliza algunos ejemplos [...] En cuano a mí, estimo inútil incluir aquí ejemplos similares. La razón es que lo que no se puede encontrar mediante regla cierta parece indigno de encontrar un lugar entre las proposiciones legítimas [...] hay bastantes cosas legítimas, incluso infinitas, para trabajar con ellas, sin ocuparnos y perder el tiempo en las inciertas [...] Quienes disfruten tales ejemplos, podrán hacer con ellos lo que les plazca.

CASO 4

périeur aux irrationnelles élémentaires.

34. Jean Bernouilli, par la considération des logarithmes des quantités dites *imaginaires*, est arrivé à une expression de π également remarquable : c'est la suivante :

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\log.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

C'est en faisant observer qu'il entre dans cette égalité des logarithmes qui sont déjà des fonctions dérivées, et que pour obtenir l'expression théorique d'un nombre (ce qui constitue sa nature), il ne faut employer que des fonctions *élémentaires* entièrement *primitives* (l'addition, la multiplication, les puissances et leurs inverses), que M. Wronski parvient à la belle expression

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right\}$$

qui ne contient plus en effet que des fonctions primitives et qui dévoile la nature entièrement transcendante de ce fameux nombre. (Voy. *Introduction à la phil. des math.*, page 26.)

En développant les binomes $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}$, $(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}$ par la formule de Newton, on retrouve la série de Leibnitz.

35. Pour compléter, autant que la nature de cet ouvrage nous le permet, ce qui a rapport au cercle, nous ne devons pas passer sous silence les *produites continues* de Wallis. Ce célèbre géomètre a trouvé

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc}....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc}}$$

$$\cfrac{}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}$$

dont les numérateurs sont la suite des carrés des nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc.

Cette fraction n'est qu'une transformation de la série de Leibnitz, et elle est tout aussi peu convergente que cette dernière ; c'est-à-dire qu'un nombre quelconque de termes de la fraction donne précisément la même valeur qu'un pareil nombre de termes de la série.

Euler s'est beaucoup occupé de toutes ces expressions singulières du nombre π ; nous ne pouvons que renvoyer à son *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, ceux qui voudraient approfondir cette matière.

37. Nous terminerons cet article en donnant la fraction continue suivante, à laquelle nous sommes parvenus par l'application de nouvelles formules sur ces importantes fonctions. *Voyez* FRACTIONS CONTINUES.

$$\tfrac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}}{1+\cfrac{\frac{4}{3.5}}{1+\cfrac{\frac{9}{5.7}}{1+\cfrac{\frac{16}{7.9}}{1+\cfrac{\frac{25}{9.11}}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

périeur aux irrationnelles élémentaires.

34. Jean Bernouilli, par la considération des logarithmes des quantités dites *imaginaires*, est arrivé à une expression de π également remarquable : c'est la suivante :

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\log.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

C'est en faisant observer qu'il entre dans cette égalité des logarithmes qui sont déjà des fonctions dérivées, et que pour obtenir l'expression théorique d'un nombre (ce qui constitue sa nature), il ne faut employer que des fonctions *élémentaires* entièrement *primitives* (l'addition, la multiplication, les puissances et leurs inverses), que M. Wronski parvient à la belle expression

$$\boxed{\frac{1}{2}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right\}}$$

qui ne contient plus en effet que des fonctions primitives et qui dévoile la nature entièrement transcendante de ce fameux nombre. (Voy. *Introduction à la phil. des math.*, page 26.)

En développant les binomes $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}$, $(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}$ par la formule de Newton, on retrouve la série de Leibnitz.

35. Pour compléter, autant que la nature de cet ouvrage nous le permet, ce qui a rapport au cercle, nous ne devons pas passer sous silence les *produites continues* de Wallis. Ce célèbre géomètre a trouvé

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}$$

$$\cfrac{}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}$$

dont les numérateurs sont la suite des carrés des nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc.

Cette fraction n'est qu'une transformation de la série de Leibnitz, et elle est tout aussi peu convergente que cette dernière ; c'est-à-dire qu'un nombre quelconque de termes de la fraction donne précisément la même valeur qu'un pareil nombre de termes de la série.

Euler s'est beaucoup occupé de toutes ces expressions singulières du nombre π ; nous ne pouvons que renvoyer à son *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, ceux qui voudraient approfondir cette matière.

37. Nous terminerons cet article en donnant la fraction continue suivante, à laquelle nous sommes parvenus par l'application de nouvelles formules sur ces importantes fonctions. *Voyez* Fractions continues.

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}}{1+\cfrac{\frac{4}{3.5}}{1+\cfrac{\frac{9}{5.7}}{1+\cfrac{\frac{16}{7.9}}{1+\cfrac{\frac{25}{9.11}}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

ment une combinaison des autres fonctions élémentaires. — Pour y parvenir, désignons, en particulier, par le radical $\sqrt{\ }$, les racines réelles, et en général, par les exposans fractionnaires, les racines quelconques, réelles ou imaginaires, des quantités algorithmiques; et prenons la racine m des deux membres de l'égalité

$$a^{\varphi x} = x.$$

En faisant attention à la nature de cette expression, nous aurons

$$(\sqrt[m]{a})^{\varphi x} = x^{\frac{1}{m}};$$

car la base doit rester constante et réelle, pour que la question soit déterminée; et c'est la fonction φx qui doit répondre aux différentes racines $x^{\frac{1}{m}}$. Mais

$$(\sqrt[m]{a})^{\varphi x} = \{1 + (\sqrt[m]{a} - 1)\}^{\varphi x} =$$

$$1 + \frac{\varphi x}{1}(\sqrt[m]{a} - 1) + \frac{\varphi x}{1} \cdot \frac{\varphi x - 1}{2} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \text{etc.}$$

Donc,

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{\varphi x}{1}(\sqrt[m]{a} - 1) + \frac{\varphi x}{1} \cdot \frac{\varphi x - 1}{2} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \text{etc.}$$

Or en observant que, lorsque la quantité arbitraire m est infiniment grande, le second membre de la dernière égalité se réduit à son premier terme (*), on obtiendra définitivement

$$\varphi x = \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1}.$$

Telle est donc la *nature* de la fonction en question. — Cette expression est évidemment celle de la génération théorique primitive de cette fonction : c'est l'*idée* ou la *conception première*, pro-

(*) Nous prions les géomètres de ne pas trouver défectueux qu'en supposant m infiniment grande, nous négligions tous les termes par rapport au premier, dans le second membre de l'égalité dont il s'agit. — Ils trouveront ci-après, lorsqu'il sera question du calcul différentiel, au moins une indication de la vraie métaphysique du calcul infinitésimal; et il ne tiendra qu'à eux de voir que le procédé que nous venons de suivre est RIGOUREUX.

posée par la raison à l'entendement, pour être réalisée dans le domaine de l'expérience. — C'est donc là la fonction primitive formant ce qu'on nomme *logarithme*.

De plus, en appliquant le binome de Newton à la puissance $M^{\frac{1}{\infty}}$, on a

$$M^{\frac{1}{\infty}} = \{1 + (M^{\mu} - 1)\}^{\frac{1}{\mu\infty}} =$$

$$1 + \frac{1}{\mu\infty}.(M^{\mu} - 1) - \frac{1}{2\mu\infty}.(M^{\mu} - 1)^2 + \frac{1}{3\mu\infty}.(M^{\mu} - 1)^3 - \text{etc.},$$

μ étant une quantité arbitraire; et partant, on aura

$$\varphi x = \frac{q}{p} \cdot \frac{(x^p - 1) - \frac{1}{2}(x^p - 1)^2 + \frac{1}{3}(x^p - 1)^3 - \text{etc.}}{(a^q - 1) - \frac{1}{2}(a^q - 1)^2 + \frac{1}{3}(a^q - 1)^3 - \text{etc.}},$$

p et q étant deux quantités arbitraires. Ainsi, en observant que ce développement peut toujours être rendu convergent, au moyen des deux quantités arbitraires p et q, on verra que la fonction φx en question est susceptible de valeurs réelles.

Or, la fonction algorithmique φx que nous venons de déterminer, et qui se trouve avoir effectivement des valeurs réelles, est évidemment une fonction dérivée ÉLÉMENTAIRE, parce qu'elle implique, dans son expression, des exposans *infinis* qui font sortir les puissances qui leur répondent, de la classe des puissances ordinaires, susceptibles d'une signification immédiate. En effet, en remontant à la source transcendantale, on trouve que les puissances ordinaires qui répondent à des exposans finis, sont des fonctions intellectuelles *immanentes*, ou des fonctions simples de l'*entendement;* et que les puissances qui répondent à des exposans infinis, ne sont possibles que par l'application de la *raison* aux fonctions de l'entendement que nous venons de nommer, et sont ainsi des fonctions intellectuelles supérieures, et nommément des fonctions *transcendantes;* ou des conceptions de la raison, des idées proposées par cette faculté intellectuelle suprême.

Il s'ensuit que les fonctions appelées LOGARITHMES, sont des fonctions algorithmiques ÉLÉMENTAIRES, parmi les fonctions algorithmiques possibles pour l'homme; et que la THÉORIE DES LOGARITHMES forme une des branches nécessaires de l'Algorithmie.

Pour répandre plus de clarté sur la nature de ces fonctions, anticipons ici, par quelques observations, sur la métaphysique même de leur théorie.

Avant tout, il ne faut pas perdre de vue que l'expression que nous avons déterminée, savoir,

$$\varphi x = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1},$$

contient nécessairement, comme expression théorique primitive, le principe de toute la théorie des logarithmes; et par conséquent, qu'elle forme la loi fondamentale de cette théorie. — C'est donc de cette expression que dérivent originairement toutes les propriétés et tous les développemens possibles de ces fonctions : toute autre déduction de leurs propriétés, et tout autre développement de leur valeur, sont nécessairement artificiels ou indirects.

Or, suivant cette expression primitive, on trouve, d'abord, que si x_1, x_2, etc. sont des quantités variables, et n_1, n_2, etc. des quantités quelconques, on a la relation

$$\varphi(x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \text{etc.}) = n_1 . \varphi x_1 + n_2 . \varphi x_2 + \text{etc.},$$

qui forme un principe subordonné de la théorie des logarithmes. En effet, on a

$$\varphi(x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \text{etc.}) = \frac{(x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \text{etc.})^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1};$$

et observant qu'en général $(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)$ est une quantité infiniment petite, on a de plus et en général

$$x^{\frac{n}{\infty}} = \{1 + (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)\}^n = 1 + n . (x^{\frac{1}{\infty}} - 1);$$

et par conséquent

$$x_1^{\frac{n_1}{\infty}} . x_2^{\frac{n_2}{\infty}} . \text{etc.} = 1 + n_1 . (x_1^{\frac{1}{\infty}} - 1) + n_2 . (x_2^{\frac{1}{\infty}} - 1) + \text{etc.}$$

Donc, en substituant, on aura

$$\varphi(x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \text{etc.}) = \frac{n_1 . (x_1^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\sqrt[\infty]{a} - 1} + \frac{n_2 . (x_2^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\sqrt[\infty]{a} - 1} + \text{etc.} = n_1 . \varphi x_1 + n_2 . \varphi x_2 + \text{etc.}$$

En second lieu, suivant l'expression primitive de la fonction dont il s'agit, on voit qu'elle forme autant de systèmes différens qu'il y a de valeurs différentes pour la base a. — Mais il se présente une particularité remarquable; la voici. — En multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fonction, par la quantité infiniment grande ∞ qui entre dans son expression, on a

$$\varphi x = \frac{\infty\,(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\infty\,(\sqrt[\infty]{a} - 1)};$$

et alors le numérateur et le dénominateur sont des quantités finies. Or le cas le plus simple de ces fonctions serait évidemment celui où le dénominateur, dans lequel n'entre point la variable, serait égal à l'unité; et par conséquent, où cette fonction serait, pour ainsi dire, indépendante de la base. Il se présente donc, dans la nature même de ces fonctions, la question rationnelle ou philosophique dont voici le schéma :

$$\infty\,(\sqrt[\infty]{e} - 1) = 1;$$

e désignant le nombre qui répond à cette question. — L'expression de ce nombre philosophique, impliqué dans la génération même des fonctions dont il s'agit, sera par conséquent

$$e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty};$$

expression qui, en développant le binome, donne

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ou bien

$$e = 2{,}71828 \text{ etc.}$$

C'est là l'expression théorique primitive, l'idée ou la conception première du nombre qu'on appelle *base des logarithmes naturels*. — Si nous désignons par L les logarithmes de ce système, nous aurons en particulier, pour cette base,

$$Lx = \infty\,(x^{\frac{1}{\infty}} - 1);$$

et par conséquent, en général, pour une base quelconque a,

$$\varphi x = \infty\,(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)\,\frac{1}{La}.$$

Reveno

De plus, suivant les expressions générales des fonctions Fx et fx, on a évidemment

$$F(-x) = F(+x), \quad f(-x) = -f(+x);$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} F(x_1 - x_2) = Fx_1 \cdot Fx_2 \mp fx_1 \cdot fx_2 \\ f(x_1 - x_2) = Fx_2 \cdot fx_1 - Fx_1 \cdot fx_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots (B).$$

Tels sont les quatre théorèmes géométriques connus (A) et (B), qui forment le principe duquel Lagrange tire les différentielles des fonctions nommées sinus et cosinus : on peut actuellement apprécier le rang logique de ce principe, et, par conséquent, la valeur philosophique des résultats qui en proviennent. — Mais revenons à la Philosophie, et disons encore quelques mots concernant le nombre remarquable que nous avons désigné par π, et que les mathématiciens connaissent déjà dans la Géométrie, comme exprimant le rapport de la circonférence au rayon du cercle, du moins dans un cas particulier.

Nous avons vu que ce nombre doit son existence au problème rationnel ou philosophique

$$\left(a^{\sqrt{-1}}\right)^{\pi} = 1;$$

et que c'est là proprement que se trouve son véritable et premier principe. Nous avons vu de plus, que ce problème est une question proposée nécessairement, par la nature même de notre savoir, dans la génération des fonctions algorithmiques nommées sinus et cosinus. Nous avons vu enfin que son expression théorique est

$$\pi = \frac{4}{La\sqrt{-1}}\left\{L(1+\sqrt{-1}) - L(1-\sqrt{-1})\right\},$$

qui peut se réduire à

$$\pi = \frac{4}{La} \cdot \frac{L\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \quad (*).$$

Mais il entre, dans cette expression, des logarithmes qui

(*) Jean Bernoulli.

sont déjà des fonctions algorithmiques DÉRIVÉES; il reste donc le problème de déterminer la nature de ce nombre philosophique, avec des fonctions algorithmiques entièrement PRIMITIVES (l'Addition, la Multiplication et les Puissances, qui sont, pour l'homme, les élémens de tout calcul). C'est là le dernier but de la raison; c'est le but, du moins secret, que cette législatrice de notre savoir avait fixé à tous ceux qui, jusqu'à ce jour, se sont occupés, dans la Géométrie, de la recherche chimérique de construire, par des lignes, le rapport de la circonférence au rayon du cercle. — Or, nous avons trouvé, pour la nature du logarithme du nombre n, l'expression

$$Ln = \infty\,(n^{\frac{1}{\infty}} - 1),$$

quel que soit le nombre n, réel ou imaginaire; nous aurons donc

$$L(1+\sqrt{-1}) - L(1-\sqrt{-1}) = \infty\,\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\};$$

et par conséquent,

$$\pi = \frac{4}{La}\cdot\frac{\infty}{\sqrt{-1}}\cdot\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\}.$$

Telle est définitivement la nature, l'expression théorique élémentaire, l'idée primitive du fameux nombre π dont il s'agit ici, et qui, dans le cas particulier où $La = 1$, est la valeur du rapport de la circonférence au rayon du cercle. — En voici le développement très-simple, suivant le binome de Newton :

$$(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty}(\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\infty}(\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{3\infty}(\sqrt{-1})^3 - \text{etc.}$$

$$(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} = 1 - \frac{1}{\infty}(\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\infty}(\sqrt{-1})^2 - \frac{1}{3\infty}(\sqrt{-1})^3 - \text{ete.}$$

$$(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} = \frac{2\sqrt{-1}}{\infty}\cdot\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{etc.}\};$$

et par conséquent

$$\pi = 8\,\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.}\}\ (*),$$

(*) Leibnitz.

Explicación

Wronsky comienza con una función $\varphi(x)$ tal que:

$$x = a^{\varphi(x)}$$

de la que obtiene, aplicando el Binomio de Newton, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{m}} = \left[\sqrt[m]{a}\right]^{\varphi(x)} &= \left[1 + (\sqrt[m]{a} - 1)\right]^{\varphi(x)} = 1 + \frac{\varphi(x)}{1} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1) \\ &+ \frac{\varphi(x)}{1} \cdot \frac{\varphi(x) - 1}{2} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \ldots \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{\varphi(x)}{1} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1) + \frac{\varphi(x)}{1} \cdot \frac{\varphi(x) - 1}{2} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \ldots$$

Pero ahora, "observando que cuando la cantidad arbitraria m es infinitamente grande el segundo miembro de esta última igualdad se reduce a su primer término", obtenemos:

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1}$$

Teniendo en cuenta que tanto el numerador como el denominador son cantidades infinitamente pequeñas, es decir, infinitesimales, multiplicándolas por una cantidad infinitamente grande m, obtendremos la misma expresión, ahora con un numerador y un denominador finitos:

$$\varphi(x) = \frac{\infty \cdot (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\infty \cdot (\sqrt[\infty]{a} - 1)}$$

Wronsky menciona ahora que entre todas estas funciones (no se pierda de vista que todas dependen de a), la más simple sería aquella en la que el denominador sería igual a la unidad, y representa ese valor concreto de a para el cual dicho denominador es igual a la unidad, mediante la letra e, valor numérico bien conocido:

$$\infty \cdot (\sqrt[\infty]{e} - 1) = 1 \Leftrightarrow e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

Por lo tanto esa función particularmente simple no es otra que la función logaritmo neperiano:

$$\ln x = \infty \cdot (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)$$

A partir de este momento, no tenemos más que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{-1} &= \ln\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \ln(1+\sqrt{-1}) - \ln(1-\sqrt{-1}) \\
&= \infty\left[(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] - \infty\left[(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] \\
&= \infty\left[(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right]
\end{aligned}$$

A partir de este momento, no tenemos más que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned}\ln\sqrt{-1} &= \ln\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \ln(1+\sqrt{-1}) - \ln(1-\sqrt{-1}) \\ &= \infty\left[\left(1+\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] - \infty\left[\left(1-\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] \\ &= \infty\left[\left(1+\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} - \left(1-\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}}\right]\end{aligned}$$

para obtener la “bella expresión que revela la naturaleza enteramente trascendente de este famoso número”:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\ln\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{\left(1+\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} - \left(1-\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}}\right\}$$

BIBLIOGRAFÍA

- Neugebauer, O., et al, *Mathematical Cuneiform Texts / Edited by O. Neugebauer and A. Sachs.; with a Chapter by A. Goetze*, 1945.
- Jens Egede Høyrup, *Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought* (Altorientalische Forschungen), 1990.
- Eleanor Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, 2003.
- Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathematiques, pures et appliquees*, Vol. 1, 1835 ▸ Link
- Wronsky, *Introduction à la philosophie des mathématiques, et technie de l'algorithmie*, 1811 ▸ Link
- Stevin, *Arithmetique*, 1585 ▸ Link