

La cuadratura del círculo y su imposibilidad

Davide Crippa

1ª Escuela de Verano CEMAT en Historia de la Matemáticas
Fundación Luis Seoane–UIMP, A Coruña

08–10 Ottobre 2025

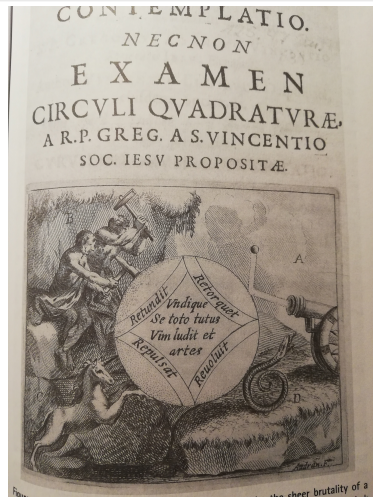


Il problema della quadratura del cerchio

La diffusione delle traduzioni latine di Archimede, Pappo, e dei commenti di Eutocio consegnò ai matematici del '500 e del '600 una serie di problemi considerati “aperti”:

- **Quadratura del cerchio** Il problem di determinare l'area del cerchio (= costruire un quadrato equivalente)
- trisezione dell'angolo.
- duplicazione del cubo o inserzione di due medie proporzionali.
- costruzione dei poligoni regolari non euclidei (in particolare, l'ettagono regolare).
- determinare l'area delle lunule.

La quadratura “impossibile”



V. Leotaud, *Curvilinearum Amoenior contemplatio*, 1654.

Vera circuli et hyperbolae quadratura, 1667

VERA
CIRCULI
ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA,

In propria sua proportionis Specie,
Inuenta, & demonstrata

A IACOBO GREGORIO
Abredonensi Scoto.



PATAVII, Ex Typographia Iacobi de Cadorinis,
Superiorum Permissu.
MDCCLXVII.

Il risultato di Gregory

L'impossibilità della quadratura analitica (algebraica) del cerchio:

*L'Auteur de ce Livre traite ce sujet d'une manière nouvelle ... la proposition la plus remarquable, dans laquelle l'Auteur prétend avoir démontré qu'il est impossible de trouver **analytiquement** la quadrature du Cercle ...*

Journal des Sçavans, 02 Luglio 1668.

Il risultato di Gregory

A modern mathematician will highly admire Gregory's daring attempt of a "proof of impossibility" even if Gregory could not attain his aim. He will consider it a first step into a new group of mathematical questions which became extremely important in the 19th century.

M. Dehn, E. Hellinger, *Certain Mathematical Achievements of James Gregory*, Am. math monthly, 50, n. 3., 1943.

Circolazione dell'opera

Poiché il tema principale dell' opera riguardava la quadratura delle sezioni coniche a centro, una copia del volume fu subito inviata a Christiaan Huygens, una delle massime autorità in materia (lettera di Gregory a Huygens, 8 Ottobre 1667).

Risposta di Huygens

Huygens scelse di non rispondere privatamente a Gregory, ma recensì il libro in una séance de l'Académie des Sciences. Il resoconto di questa discussione fu pubblicato sul *Journal des Sçavans* (2 Luglio 1668).

Nel corso dei mesi successivi, risposte polemiche di Gregory, interventi di altri matematici che agirono da "giudici" della controversia.

Tra di essi **John Wallis**.

Interesse della controversia

- Tra le critiche espresse da Huygens, mi concentrerò sulle obiezioni riguardanti la tesi, sostenuta e argomentata nel VCHQ, circa l'impossibilità di risolvere la quadratura del cerchio, delle coniche a centro e dei loro settori mediante metodi algebrici (o "analitici", nella terminologia di Gregory).
- Questo tema ha anche un chiaro significato metodologico: quali sono i limiti della geometria cartesiana? L'algebra ci permette di rappresentare tutte le quantità a cui l'intuizione geometrica ci dà accesso?

Interesse della controversia

- Tra le critiche espresse da Huygens, mi concentrerò sulle obiezioni riguardanti la tesi, sostenuta e argomentata nel VCHQ, circa l'impossibilità di risolvere la quadratura del cerchio, delle coniche a centro e dei loro settori mediante metodi algebrici (o "analitici", nella terminologia di Gregory).
- Questo tema ha anche un chiaro significato metodologico: quali sono i limiti della geometria cartesiana? L'algebra ci permette di rappresentare tutte le quantità a cui l'intuizione geometrica ci dà accesso?

Ambiguità

- Tuttavia, ad un esame più dettagliato, il risultato di Gregory non risulta privo di ambiguità, che rappresentano uno dei moventi alla base della controversia che oppose Huygens a Gregory.
- Qual é l'esatto contenuto matematico del teorema di impossibilità di Gregory?

Ambiguità

- Tuttavia, ad un esame più dettagliato, il risultato di Gregory non risulta privo di ambiguità, che rappresentano uno dei moventi alla base della controversia che oppose Huygens a Gregory.
- Qual é l'esatto contenuto matematico del teorema di impossibilità di Gregory?

Quantità analitiche I

- In apertura del VCHQ, Gregory definisce il concetto chiave di quantità analitica (df. 6):

*Quando una quantità é **composta** da quantità note mediante addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e estrazione di radici, diciamo che essa é composta analiticamente (df. 6).*

Quantità analitiche II

- a, b sono quantità date (Gregory non ne specifica la natura), $a + b, a \times b, a \div b$ e ogni combinazione o “composizione” finita delle quattro operazioni aritmetiche (al di fuori dell'estrazione di radice) genera quantità commensurabili con a e b .
- Ogni combinazione o composizione finita delle quattro operazioni aritmetiche più l'estrazione di radice (ennesima), genera una quantità analitica rispetto alle quantità date (ad esempio $\sqrt[3]{a+b}$ è analitica rispetto ad a e b).

Quantità analitiche II

- a, b sono quantità date (Gregory non ne specifica la natura), $a + b, a \times b, a \div b$ e ogni combinazione o “composizione” finita delle quattro operazioni aritmetiche (al di fuori dell'estrazione di radice) genera quantità commensurabili con a e b .
- Ogni combinazione o composizione finita delle quattro operazioni aritmetiche più l'estrazione di radice (ennesima), genera una quantità analitica rispetto alle quantità date (ad esempio $\sqrt[3]{a+b}$ è analitica rispetto ad a e b).

Quantità analitiche II

- Da un punto di vista logico, la relazione di “ essere analitico” occorre tra due quantità, come nel caso della relazione di commensurabilità.

Quantità analitiche III

- Gregory non limita le sue considerazioni ai segmenti, ma le estende a “quantità” qualsiasi.
- Frequenti riferimenti alla *Géométrie* fanno supporre che egli avesse in mente la classe dei segmenti (nel piano), in cui sono definite le cinque operazioni aritmetiche, come modello di quantità.

Quantità analitiche III

- Gregory non limita le sue considerazioni ai segmenti, ma le estende a “quantità” qualsiasi.
- Frequenti riferimenti alla *Géométrie* fanno supporre che egli avesse in mente la classe dei segmenti (nel piano), in cui sono definite le cinque operazioni aritmetiche, come modello di quantità.

De Beaune e la *mathesis universalis*

- Questa interpretazione é del resto comune agli stessi Cartesiani. Leggiamo nelle *Notae* alla *Géométrie* di Florimondde Beaune:

Si aggiunga che possiamo utilizzarli [i segmenti] per tutte le altre cose che hanno tra sé un rapporto o una proporzione . . . possiamo quindi esprimere per mezzo di due linee il rapporto tra due superfici o tra due velocità, e altre cose del genere, che stabiliamo avere alcuna relazione.

Geometria, 1659, vol. I, p. 108.

Problema della completezza della Geometria

- Il problema della possibilità/impossibilità di risolvere la quadratura di una conica analiticamente:
- Possiamo esprimere l'area di una conica (o di un settore dato) per mezzo di un elemento della classe di segmenti, generata a partire da un dato segmento unità mediante una sequenza finita di operazioni aritmetiche? Nel caso del cerchio: l'area di un settore (ad esempio, il settore d'arco $\frac{\pi}{4}$) è analitica con il raggio?

Problema della completezza della Geometria

- Il problema della possibilità/impossibilità di risolvere la quadratura di una conica analiticamente:
- Possiamo esprimere l'area di una conica (o di un settore dato) per mezzo di un elemento della classe di segmenti, generata a partire da un dato segmento unità mediante una sequenza finita di operazioni aritmetiche? Nel caso del cerchio: l'area di un settore (ad esempio, il settore d'arco $\frac{\pi}{4}$) è analitica con il raggio?

Costruzione di una serie convergente

- Per rispondere a questa domanda, Gregory comincia con dare una definizione astratta del concetto di “serie convergente”:
- Una coppia di successioni $\{a_n, b_n\}$, $\{a_n\}$ crescente e $\{b_n\}$ decrescente, tale che, per ogni n , e per due composizioni analitiche S e S' abbiamo:

$$\{a_n\} < \{b_n\}$$

$$a_{n+1} = S(a_n, b_n)$$

$$b_{n+1} = S'(a_n, b_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

Costruzione di una serie convergente

- Per rispondere a questa domanda, Gregory comincia con dare una definizione astratta del concetto di “serie convergente”:
- Una coppia di successioni $\{a_n, b_n\}$, $\{a_n\}$ crescente e $\{b_n\}$ decrescente, tale che, per ogni n , e per due composizioni analitiche S e S' abbiamo:

$$\{a_n\} < \{b_n\}$$

$$a_{n+1} = S(a_n, b_n)$$

$$b_{n+1} = S'(a_n, b_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

La “terminatio” della serie

- Gregory assume che $\{a_n\}$ sia limitata superiormente da un “ultimo” termine a_∞ , e $\{b_n\}$ sia limitata inferiormente da un “ultimo” termine b_∞ .
- Dato che la sequenza delle differenze $(b_n - a_n)$ diminuisce al crescere di n , possiamo “immaginare” che la differenza tra b_∞ e a_∞ sia inferiore ad ogni quantità data, perciò avremo:
 $a_\infty = b_\infty$ (dato che Gregory non ammette quantità infinitesimali).
- La quantità $a_\infty = b_\infty$ è chiamata da Gregory “terminatio” (“limite”, o “somma”).

La “terminatio” della serie

- Gregory assume che $\{a_n\}$ sia limitata superiormente da un “ultimo” termine a_∞ , e $\{b_n\}$ sia limitata inferiormente da un “ultimo” termine b_∞ .
- Dato che la sequenza delle differenze $(b_n - a_n)$ diminuisce al crescere di n , possiamo “immaginare” che la differenza tra b_∞ e a_∞ sia inferiore ad ogni quantità data, perciò avremo:
 $a_\infty = b_\infty$ (dato che Gregory non ammette quantità infinitesimali).
- La quantità $a_\infty = b_\infty$ è chiamata da Gregory “terminatio” (“limite”, o “somma”).

La “terminatio” della serie

- Gregory assume che $\{a_n\}$ sia limitata superiormente da un “ultimo” termine a_∞ , e $\{b_n\}$ sia limitata inferiormente da un “ultimo” termine b_∞ .
- Dato che la sequenza delle differenze $(b_n - a_n)$ diminuisce al crescere di n , possiamo “immaginare” che la differenza tra b_∞ e a_∞ sia inferiore ad ogni quantità data, perciò avremo:
 $a_\infty = b_\infty$ (dato che Gregory non ammette quantità infinitesimali).
- La quantità $a_\infty = b_\infty$ è chiamata da Gregory “terminatio” (“limite”, o “somma”).

Calcolo del limite

- Regola generale per calcolare il limite z di una serie convergente $\{a_n, b_n\}$ formata da quantità analitiche. Si tratta di trovare una composizione invariante per ogni coppia (a_k, b_k) :

$$f(a_0, b_0) = f(a_1, b_1) = \dots f(z, z) = K$$

- In tal modo, per trovare z sarà sufficiente risolvere la seguente equazione (algebraica) nell'incognita z :

$$f(a_0, b_0) = f(z, z) = K$$

- **Assunzione implicita** (*generalità*): se il limite della sequenza esiste nel dominio delle quantità analitiche, allora può essere calcolato secondo la regola appena esposta.

Calcolo del limite

- Regola generale per calcolare il limite z di una serie convergente $\{a_n, b_n\}$ formata da quantità analitiche. Si tratta di trovare una composizione invariante per ogni coppia (a_k, b_k) :

$$f(a_0, b_0) = f(a_1, b_1) = \dots f(z, z) = K$$

- In tal modo, per trovare z sarà sufficiente risolvere la seguente equazione (algebraica) nell'incognita z :

$$f(a_0, b_0) = f(z, z) = K$$

- **Assunzione implicita** (*generalità*): se il limite della sequenza esiste nel dominio delle quantità analitiche, allora può essere calcolato secondo la regola appena esposta.

Calcolo del limite

- Regola generale per calcolare il limite z di una serie convergente $\{a_n, b_n\}$ formata da quantità analitiche. Si tratta di trovare una composizione invariante per ogni coppia (a_k, b_k) :

$$f(a_0, b_0) = f(a_1, b_1) = \dots f(z, z) = K$$

- In tal modo, per trovare z sarà sufficiente risolvere la seguente equazione (algebraica) nell'incognita z :

$$f(a_0, b_0) = f(z, z) = K$$

- **Assunzione implicita** (*generalità*): se il limite della sequenza esiste nel dominio delle quantità analitiche, allora può essere calcolato secondo la regola appena esposta.

La quadratura del cerchio

- Nelle proposizioni iniziali del VCHQ, Gregory propone un metodo, di derivazione archimedeo, per approssimare l'area di un settore qualsiasi di una conica a centro, minore di un semicerchio.
- Si tratta di costruire **due successioni**: una successione crescente $\{I_n\}$, i cui termini sono poligoni inscritti nel cerchio ($I_0, I_1, I_2 \dots$), e una decrescente $\{C_n\}$, i cui termini sono poligoni circoscritti ($C_0, C_1, C_2 \dots$). I poligoni di partenza sono scelti in modo tale che la loro area sia analitica con il diametro della conica.
- Per semplicità, mi limiterò a considerare il caso di un settore del cerchio.

La quadratura del cerchio

- Nelle proposizioni iniziali del VCHQ, Gregory propone un metodo, di derivazione archimedeo, per approssimare l'area di un settore qualsiasi di una conica a centro, minore di un semicerchio.
- Si tratta di costruire **due successioni**: una successione crescente $\{I_n\}$, i cui termini sono poligoni inscritti nel cerchio ($I_0, I_1, I_2 \dots$), e una decrescente $\{C_n\}$, i cui termini sono poligoni circoscritti ($C_0, C_1, C_2 \dots$). I poligoni di partenza sono scelti in modo tale che la loro area sia analitica con il diametro della conica.
- Per semplicità, mi limiterò a considerare il caso di un settore del cerchio.

Costruzione di una serie di poligoni

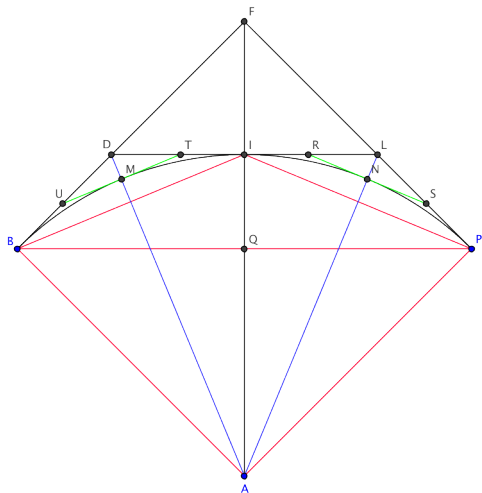


Figure: <https://www.geogebra.org/m/vytxudty>.

The hyperbola

The example of the hyperbolic sector:

<https://www.geogebra.org/m/r6ybn69j>

- **Mediante questa procedura ricorsiva**, Gregory ottiene una coppia di successioni: $(I_0, C_0), (I_1, C_1) \dots (I_n, C_n) \dots$ di poligoni inscritti e circoscritti, definita "serie" (*series*).
- Entrambe le successioni offrono, secondo il modello archimedeo, approssimazioni via via più precise del settore di conica. Gregory conclude:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{I_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{C_n\} = A.$$

- Mediante questa procedura ricorsiva, Gregory ottiene una coppia di successioni: $(I_0, C_0), (I_1, C_1) \dots (I_n, C_n) \dots$ di poligoni inscritti e circoscritti, definita "serie" (*series*).
- Entrambe le successioni offrono, secondo il modello archimedeo, approssimazioni via via più precise del settore di conica. Gregory conclude:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{I_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{C_n\} = A.$$

Convergenza della serie

Gregory mostra la convergenza della serie di poligoni nel senso di Gregory, dimostrando la seguente proprietà:

$$\forall n, (C_{n+1} - I_{n+1}) < \frac{1}{2}(C_n - I_n).$$

Quindi, $\forall n$:

$$(C_n - I_n) < \frac{1}{2^n}(C_0 - I_0)$$

- Gregory dimostra che tra le due coppie iniziali di poligoni inscritti e circoscritti, risp: (I_0, C_0) , (I_1, C_1) , sussistono le seguenti relazioni:

Theorem

$$I_1^2 = I_0 C_0$$
$$\frac{2}{C_1} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{I_1}$$

- Gregory può concludere: ogni termine I_n della sequenza di poligoni inscritti e ogni termine C_n della sequenza di poligoni circoscritti può essere espresso a partire dai termini iniziali I_0 e C_0 mediante un numero finito di operazioni aritmetiche $(+, -, \times, \div, \sqrt{n})$. Quindi ogni termine I_n e C_n è analitico rispetto alla coppia di termini I_0 e C_0 .

- Gregory dimostra che tra le due coppie iniziali di poligoni inscritti e circoscritti, risp: (I_0, C_0) , (I_1, C_1) , sussistono le seguenti relazioni:

Theorem

$$I_1^2 = I_0 C_0$$
$$\frac{2}{C_1} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{I_1}$$

- Gregory può concludere: ogni termine I_n della sequenza di poligoni inscritti e ogni termine C_n della sequenza di poligoni circoscritti può essere espresso a partire dai termini iniziali I_0 e C_0 mediante un numero finito di operazioni aritmetiche $(+, -, \times, \div, \sqrt{n})$. Quindi ogni termine I_n e C_n è analitico rispetto alla coppia di termini I_0 e C_0 .

- Gregory dimostra che tra le due coppie iniziali di poligoni inscritti e circoscritti, risp: (I_0, C_0) , (I_1, C_1) , sussistono le seguenti relazioni:

Theorem

$$I_1^2 = I_0 C_0$$
$$\frac{2}{C_1} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{I_1}$$

- Gregory può concludere: ogni termine I_n della sequenza di poligoni inscritti e ogni termine C_n della sequenza di poligoni circoscritti può essere espresso a partire dai termini iniziali I_0 e C_0 mediante un numero finito di operazioni aritmetiche $(+, -, \times, \div, \sqrt{})$. Quindi ogni termine I_n e C_n è analitico rispetto alla coppia di termini I_0 e C_0 .

- Ci chiediamo: Il limite delle due successioni di poligoni, **la cui esistenza é garantita geometricamente (si tratta del settore della conica)** può essere ottenuto analiticamente dai termini delle successioni stesse?
- Esiste una composizione analitica (chiamiamola per comodità " f "), tale che (A é il settore, o l'area del settore):

$$f(I_0, C_0) = A?$$

- Ci chiediamo: Il limite delle due successioni di poligoni, **la cui esistenza é garantita geometricamente (si tratta del settore della conica)** può essere ottenuto analiticamente dai termini delle successioni stesse?
- Esiste una composizione analitica (chiamiamola per comodità "f"), tale che (A é il settore, o l'area del settore):

$$f(I_0, C_0) = A?$$

Affermo che l'area di un settore del cerchio, dell'ellisse o dell'iperbole $\widehat{APB}$ non é composto analiticamente dal triangolo ABP e dal trapezio $ABFP$.

J. Gregory, VCHQ, XI.

Dimostrazione di impossibilità I

- Assumiamo che A sia una quantità analitica rispetto alla serie $\{I_0, C_0\}$.
- Quindi esiste una composizione analitica f invariante rispetto ad ogni coppia (in base all'assunzione fatta da Gregory):

$$f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) = \dots f(I_n, C_n) = \dots = f(A)$$

Dimostrazione di impossibilità I

- Assumiamo che A sia una quantità analitica rispetto alla serie $\{I_0, C_0\}$.
- Quindi esiste una composizione analitica f invariante rispetto ad ogni coppia (in base all'assunzione fatta da Gregory):

$$f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) = \dots f(I_n, C_n) = \dots = f(A)$$

- Se f esiste, tale che :

$$f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) = \dots f(I_n, C_n) = \dots = f(A),$$

- Avremo anche:

$$f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1).$$

Dimostrazione di impossibilità III

- Trasformiamo l'equazione: $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1)$ nella seguente (sostituzione):

$$f(I_0, C_0) = f(\sqrt{I_0 C_0}, \frac{1}{C_0} + \frac{1}{\sqrt{I_0 C_0}})$$

- Eliminiamo le radici quadrate mediante una parametrizzazione:
 $I_0 = a^3 + a^2 b$, $C_0 = ab^2 + b^3$:

$$f(a^3 + a^2 b, ab^2 + b^3) = f(ba^2 + b^2 a, 2b^2 a)$$

- Gregory cerca una contraddizione. Il suo argomento: la parte sinistra dell'eguaglianza sarà un polinomio nell'incognita a , di grado maggiore rispetto all'espressione di destra. Questo vale per qualsiasi composizione finita f .
- Quindi la regola per computare il limite della serie non si può applicare alla serie $\{I_0, C_0\}$.
- Il limite A non è una quantità analitica con i termini della serie.

Dimostrazione di impossibilità III

- Trasformiamo l'equazione: $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1)$ nella seguente (sostituzione):

$$f(I_0, C_0) = f(\sqrt{I_0 C_0}, \frac{1}{C_0} + \frac{1}{\sqrt{I_0 C_0}})$$

- Eliminiamo le radici quadrate mediante una parametrizzazione:
 $I_0 = a^3 + a^2 b$, $C_0 = ab^2 + b^3$:

$$f(a^3 + a^2 b, ab^2 + b^3) = f(ba^2 + b^2 a, 2b^2 a)$$

- Gregory cerca una contraddizione. Il suo argomento: la parte sinistra dell'eguaglianza sarà un polinomio nell'incognita a , di grado maggiore rispetto all'espressione di destra. Questo vale per qualsiasi composizione finita f .
- Quindi la regola per computare il limite della serie non si può applicare alla serie $\{I_0, C_0\}$.
- Il limite A non è una quantità analitica con i termini della serie.

Dimostrazione di impossibilità III

- Trasformiamo l'equazione: $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1)$ nella seguente (sostituzione):

$$f(I_0, C_0) = f(\sqrt{I_0 C_0}, \frac{1}{C_0} + \frac{1}{\sqrt{I_0 C_0}})$$

- Eliminiamo le radici quadrate mediante una parametrizzazione:
 $I_0 = a^3 + a^2 b$, $C_0 = ab^2 + b^3$:

$$f(a^3 + a^2 b, ab^2 + b^3) = f(ba^2 + b^2 a, 2b^2 a)$$

- Gregory cerca una contraddizione. Il suo argomento: la parte sinistra dell'eguaglianza sarà un polinomio nell'incognita a , di grado maggiore rispetto all'espressione di destra. Questo vale per qualsiasi composizione finita f .
- Quindi la regola per computare il limite della serie non si può applicare alla serie $\{I_0, C_0\}$.
- Il limite A non è una quantità analitica con i termini della serie.

Dimostrazione di impossibilità III

- Trasformiamo l'equazione: $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1)$ nella seguente (sostituzione):

$$f(I_0, C_0) = f(\sqrt{I_0 C_0}, \frac{1}{C_0} + \frac{1}{\sqrt{I_0 C_0}})$$

- Eliminiamo le radici quadrate mediante una parametrizzazione:
 $I_0 = a^3 + a^2 b$, $C_0 = ab^2 + b^3$:

$$f(a^3 + a^2 b, ab^2 + b^3) = f(ba^2 + b^2 a, 2b^2 a)$$

- Gregory cerca una contraddizione. Il suo argomento: la parte sinistra dell'eguaglianza sarà un polinomio nell'incognita a , di grado maggiore rispetto all'espressione di destra. Questo vale per qualsiasi composizione finita f .
- Quindi la regola per computare il limite della serie non si può applicare alla serie $\{I_0, C_0\}$.
- Il limite A non é una quantità analitica con i termini della serie.

Attenzione

- Nello scholium alla XI, Gregory osserva:

Qualcuno potrebbe obiettare, forse, che il rapporto tra il triangolo ABP e il settore $ABIP$ può variare in tutti i modi, e perciò queste figure possono stare in qualsiasi rapporto tra loro, anche analitico o commensurabile. Dico che ciò é verissimo, ma in quel caso, il rapporto tra il triangolo APB e il trapezio $ABFP$ non sarà analitico.

J.Gregory, *VCHQ*, Scholium XI, p. 19.

Quali settori considera Gregory?

- Gregory assume che il rapporto tra le aree del triangolo inscritto e del trapezio circoscritto sia analitico, come condizione necessaria per la validità del teorema XI.
- Nel caso del cerchio, entrambe le aree sono funzioni della corda e del raggio. Perciò é sufficiente, perché le aree siano analitiche tra loro, che la corda sia analitica col raggio.
- In base a questa restrizione, i settori coinvolti dal teorema XI sono una sottoclasse dei settori del cerchio, cioè i settori delimitati da una corda analitica col raggio.

Quali settori considera Gregory?

- Gregory assume che il rapporto tra le aree del triangolo inscritto e del trapezio circoscritto sia analitico, come condizione necessaria per la validità del teorema XI.
- Nel caso del cerchio, entrambe le aree sono funzioni della corda e del raggio. Perciò é sufficiente, perché le aree siano analitiche tra loro, che la corda sia analitica col raggio.
- In base a questa restrizione, i settori coinvolti dal teorema XI sono una sottoclasse dei settori del cerchio, cioè i settori delimitati da una corda analitica col raggio.

Quali settori considera Gregory?

- Gregory assume che il rapporto tra le aree del triangolo inscritto e del trapezio circoscritto sia analitico, come condizione necessaria per la validità del teorema XI.
- Nel caso del cerchio, entrambe le aree sono funzioni della corda e del raggio. Perciò é sufficiente, perché le aree siano analitiche tra loro, che la corda sia analitica col raggio.
- In base a questa restrizione, **i settori coinvolti dal teorema XI sono una sottoclasse dei settori del cerchio, cioè i settori delimitati da una corda analitica col raggio.**

Corollario: l'impossibilità della quadratura definita

- Teorema XI (si può riformulare così): l'area di un settore del cerchio $\widehat{APB}$, sotteso da una corda analitica col raggio, non é composto analiticamente dal triangle ABP e dal trapezio $ABFP$.
- Il settore $\widehat{APB}$ uguale a un quarto del cerchio non é composto analiticamente dal triangolo ABP e dal trapezio $ABFP$.
- Il cerchio intero non é quadrabile analiticamente.

Corollario: l'impossibilità della quadratura definita

- Teorema XI (si può riformulare così): l'area di un settore del cerchio $\widehat{APB}$, sotteso da una corda analitica col raggio, non é composto analiticamente dal triangle ABP e dal trapezio $ABFP$.
- Il settore $\widehat{APB}$ uguale a un quarto del cerchio non é composto analiticamente dal triangolo ABP e dal trapezio $ABFP$.
- Il cerchio intero non é quadrabile analiticamente.

Corollario: l'impossibilità della quadratura definita

- Teorema XI (si può riformulare così): l'area di un settore del cerchio $\widehat{APB}$, sotteso da una corda analitica col raggio, non é composto analiticamente dal triangle ABP e dal trapezio $ABFP$.
- Il settore $\widehat{APB}$ uguale a un quarto del cerchio non é composto analiticamente dal triangolo ABP e dal trapezio $ABFP$.
- Il cerchio intero non é quadrabile analiticamente.

Una nuova operazione

Così come i radicali non sono mai ottenuti dall'addizione, sottrazione, moltiplicazione o divisione tra quantità commensurabili, ma solo dall'estrazione di radici; così numeri o quantità non analitiche non sono mai ottenute dall'addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisioni ed estrazione di radice di quantità analitiche, ma da questa sesta operazione, così che la nostra scoperta aggiunge un'altra operazione aritmetica, e un nuovo tipo di rapporto.

Benché sia vero [che la 'terminatio' é analitica con la serie di Gregory] quando il limite é trovato col metodo insegnato [da Gregory], non possiamo trarne una conclusione generale; a meno di supporre che il limite di una serie di grandezze, da lui chiamate convergenti, non si può trovare che col suo metodo, o che se la si trova per mezzo di un'altra via, la potremo anche trovare con il suo metodo, ciò che non ha provato.

Journal des Sçavans, 2 July 1668.

*Benché Gregory nella risposta che ha dato alle mie obiezioni abbia sopperito a qualche difetto nelle sue dimostrazioni, mi permetterà di dire che molto ancora ci vuole perché dopo ciò l'impossibilità della quadratura del cerchio sia ben provata, che **é ancora incerto se il cerchio e il quadrato del suo diametro non siano commensurabili, cioè non siano tra loro nel rapporto di un numero a un numero.***

Huygens, *Oeuvres*, vol. XX, p. 308.

Risposta di Huygens II

Poiché anche dopo la dimostrazione data come supplemento alla proposizione 11, che cosa ne può concludere, se non che non ogni settore del cerchio é analitico alla sua figura rettilinea inscritta o circoscritta. Ciò é cosa completamente diversa dal dire che nessun settore é analitico. Chi dice “non omnis” non dice “nullus”.

Huygens, XX, p. 308

Risposta di Huygens III

Per concludere che il rapporto del cerchio al quadrato del suo diametro non é analitico, bisognava dimostrare non solo che il settore del Cerchio non é analitico “indefinite” con la sua figura inscritta, benché questa dimostrazione abbia un certo fascino; ma anche che ciò é vero “in omni casu definito”.

Critica di Wallis

- Wallis a Oldenburg (12 e 24 novembre 1668): Gregory ha commesso una **fallacia logica** (un errore che "ogni logico, ma nessun matematico comprenderà"):
- (Premessa maggiore) Se ci fosse una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$, allora il cerchio intero sarà composto analiticamente a partire da una coppia di poligoni inscritti e circoscritti.
- (Premessa minore) Ma la proposizione XI esclude l'esistenza di questa composizione (se prendiamo la XI per vera). E l'interpretazione 2. data sopra ("Non esiste una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$.").
- Pertanto il cerchio non può essere composto analiticamente a partire dai poligoni.

Critica di Wallis

- Wallis a Oldenburg (12 e 24 novembre 1668): Gregory ha commesso una **fallacia logica** (un errore che "ogni logico, ma nessun matematico comprenderà"):
- (Premessa maggiore) Se ci fosse una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$, allora il cerchio intero sarà composto analiticamente a partire da una coppia di poligoni inscritti e circoscritti.
- (Premessa minore) Ma la proposizione XI esclude l'esistenza di questa composizione (se prendiamo la XI per vera). E l'interpretazione 2. data sopra ("Non esiste una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$.").
- Pertanto il cerchio non può essere composto analiticamente a partire dai poligoni.

Critica di Wallis

- Wallis a Oldenburg (12 e 24 novembre 1668): Gregory ha commesso una **fallacia logica** (un errore che "ogni logico, ma nessun matematico comprenderà"):
- (Premessa maggiore) Se ci fosse una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$, allora il cerchio intero sarà composto analiticamente a partire da una coppia di poligoni inscritti e circoscritti.
- (Premessa minore) Ma la proposizione XI esclude l'esistenza di questa composizione (se prendiamo la XI per vera). E l'interpretazione 2. data sopra ("Non esiste una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$.").
- Pertanto il cerchio non può essere composto analiticamente a partire dai poligoni.

Critica di Wallis

- Wallis a Oldenburg (12 e 24 novembre 1668): Gregory ha commesso una **fallacia logica** (un errore che "ogni logico, ma nessun matematico comprenderà"):
- (Premessa maggiore) Se ci fosse una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$, allora il cerchio intero sarà composto analiticamente a partire da una coppia di poligoni inscritti e circoscritti.
- (Premessa minore) Ma la proposizione XI esclude l'esistenza di questa composizione (se prendiamo la XI per vera). E l'interpretazione 2. data sopra ("Non esiste una composizione analitica tale che, per ogni settore del cerchio, $f(I_0, C_0) = f(I_1, C_1) \dots = f(z, z)$.").
- Pertanto il cerchio non può essere composto analiticamente a partire dai poligoni.

- Si tratta di un sillogismo, scrive Wallis, "**peccant in form**", benché tutte le proposizioni in esso siano vere. La conclusione pertanto non segue dalle premesse.
- Wallis sostiene che l'errore di Gregory possa essere corretto, **partendo dalla dimostrazione che il rapporto tra il cerchio e il quadrato inscritto o circoscritto non è una quantità analitica, e derivando da questa la proposizione 11 del VCHQ.**
- Wallis sostiene che l'impossibilità della quadratura del cerchio intero è stata dimostrata nel suo *Arithmetica infinitorum*, ma in quell'opera ha solo congetturato tale impossibilità.

- Si tratta di un sillogismo, scrive Wallis, "**peccant in form**", benché tutte le proposizioni in esso siano vere. La conclusione pertanto non segue dalle premesse.
- Wallis sostiene che l'errore di Gregory possa essere corretto, **partendo dalla dimostrazione che il rapporto tra il cerchio e il quadrato inscritto o circoscritto non é una quantità analitica, e derivando da questa la proposizione 11 del VCHQ.**
- Wallis sostiene che l'impossibilità della quadratura del cerchio intero é stata dimostrata nel suo *Arithmetica infinitorum*, ma in quell'opera ha solo congetturato tale impossibilità.

- Si tratta di un sillogismo, scrive Wallis, "**peccant in form**", benché tutte le proposizioni in esso siano vere. La conclusione pertanto non segue dalle premesse.
- Wallis sostiene che l'errore di Gregory possa essere corretto, **partendo dalla dimostrazione che il rapporto tra il cerchio e il quadrato inscritto o circoscritto non é una quantità analitica, e derivando da questa la proposizione 11 del VCHQ.**
- Wallis sostiene che l'impossibilità della quadratura del cerchio intero é stata dimostrata nel suo *Arithmetica infinitorum*, ma in quell'opera ha solo congetturato tale impossibilità.

Polemica di Wallis sulla logica

- E interessante notare che sia Huygens sia Wallis attribuiscono a Gregory un errore logico. Dobbiamo forse vedere una polemica con lo stesso Gregory sul ruolo della logica nello sviluppo delle teorie matematiche:

Voglio avvisare gli studiosi delle teorie matematiche su quanto sia vano promuovere la matematica per mezzo di fittizie ragioni filosofiche, che sono utili solo a persuadere la credula massa del volgo. Nella matematica non c'è nessuna logica al di fuori della geometria né alcuna filosofia che, per mezzo della geometria, non si fondi su esperienze infallibili.

VCHQ, p. 7.

La controversia si chiude nel 1668

Riguardo alla replica di Gregory alla sua risposta [del novembre 1667], essa sarà inserita, in virtù del rispetto che le dobbiamo, nelle Transactions di questo mese. Tuttavia, è mio sommo desiderio che questa disputa sia terminata una volta per tutte, e che non si abbia a intrattenere i lettori della nostra rivista con tali dettagli, che manifestano la collera e l'animosità tra persone illustri, e il sospetto che la conoscenza matematica sia incerta.

Oldenburg to Huygens, Feb. 1669

Che cosa dimostra Gregory?

- Che cosa non dimostra Gregory? non dimostra che la quadratura algebrica del cerchio é impossibile (Wallis, Huygens).
- Per Wallis: Il cerchio non è quadrabile analiticamente.
- per Huygens: il rapporto tra il cerchio e il quadrato iscritto o circoscritto può essere “sordo” o addirittura commensurabile (Huygens a Gallois, 12 Novembre 1668).

Che cosa dimostra Gregory?

- Che cosa non dimostra Gregory? non dimostra che la quadratura algebrica del cerchio é impossibile (Wallis, Huygens).
- Per Wallis: Il cerchio non è quadrabile analiticamente.
- per Huygens: il rapporto tra il cerchio e il quadrato iscritto o circoscritto può essere “sordo” o addirittura commensurabile (Huygens a Gallois, 12 Novembre 1668).

Che cosa dimostra Gregory?

- Che cosa non dimostra Gregory? non dimostra che la quadratura algebrica del cerchio é impossibile (Wallis, Huygens).
- Per Wallis: Il cerchio non è quadrabile analiticamente.
- per Huygens: il rapporto tra il cerchio e il quadrato iscritto o circoscritto può essere “sordo” o addirittura commensurabile (Huygens a Gallois, 12 Novembre 1668).

Conclusioni II

Separazione “implicita” tra due problemi:

L'area del cerchio, o di un dato settore é una quantità algebrica/non algebrica?

La relazione (funzione) tra l'area (arco) di cerchio e il raggio o la corda è algebrica/non algebrica.

Esattezza e nuove operazioni

- L'aritmetica deve essere arricchita con una “sesta operazione”, per poter esprimere l'area dei settori di una conica a centro. Questa sesta operazione corrisponde alla costruzione di una serie convergente.
- analogia con l'introduzione delle quantità irrazionali.
- Il ricorso ad oggetti infiniti (serie) per rimuovere i limiti computazionali della geometria mina la completezza dell'algebra cartesiana.

Esattezza e nuove operazioni

- L'aritmetica deve essere arricchita con una “sesta operazione”, per poter esprimere l'area dei settori di una conica a centro. Questa sesta operazione corrisponde alla costruzione di una serie convergente.
- analogia con l'introduzione delle quantità irrazionali.
- Il ricorso ad oggetti infiniti (serie) per rimuovere i limiti computazionali della geometria mina la completezza dell'algebra cartesiana.

Esattezza e nuove operazioni

- L'aritmetica deve essere arricchita con una “sesta operazione”, per poter esprimere l'area dei settori di una conica a centro. Questa sesta operazione corrisponde alla costruzione di una serie convergente.
- analogia con l'introduzione delle quantità irrazionali.
- Il ricorso ad oggetti infiniti (serie) per rimuovere i limiti computazionali della geometria mina la completezza dell'algebra cartesiana.

GRAZIE!

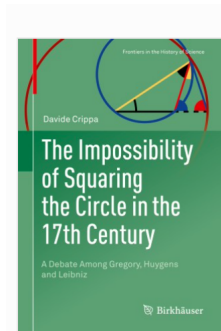


Figure: Davide Crippa, *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century: A Debate among Gregory, Huygens and Leibniz*. Basel: Birkhäuser, 2019

La risposta di Gregory

Teorema Se l'area del settore di cerchio Z è una quantità analitica con i termini della serie, allora:

$$S(I_0, C_0) = \dots S(I_n, C_n) = S(I_{n+1}, C_{n+1}) = Z.$$

La risposta I

Per assurdo, G. suppone che l'area Z di un settore sia analitica rispetto alla serie, ma che non sia calcolabile col metodo di Gregory.

$$S(I_0, C_0) \neq S(I_1, C_1),$$

$$S(I_1, C_1) - S(I_0, C_0) = \alpha > 0.$$

Risposta III

Per la convergenza della serie, esiste un n , tale che: $(C_n - I_n) < \alpha$.

ma $S(I_0, C_0) = Z$, quindi: $I_n < S(I_0, C_0) < C_n$.

Gregory afferma che per la quantità $S(I_1, C_1) \neq Z$ vale il seguente:

$$I_{n+1} < S(I_1, C_1) < C_{n+1}$$

e a fortiori: $I_n < S(I_1, C_1) < C_n$.

Contraddizione: $S(I_1, C_1) - S(I_0, C_0) < C_n - I_n < \alpha$, e
 $S(I_1, C_1) - S(I_0, C_0) = \alpha$

Errore di Gregory

Gregory non giustifica il seguente passaggio:

$$\exists n, I_n < S(I_0, C_0) < C_n \stackrel{?}{\rightarrow} I_{n+1} < S(I_1, C_1) < C_{n+1}$$

L'inferenza non é valida per una serie e una composizione arbitrarie (controesempio in (Lützen, 2014)).