1ª ESCUELA DE VERANO CEMAT EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS: estudio, aplicaciones y enseñanza
A CORUÑA, del 8-10 octubre 2025

# LOS ORÍGENES DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA: DESCARTES Y FERMAT

Mónica Blanco
Departament de Matemàtiques
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

## INTRODUCCIÓN

## DESCARTES Y LA DETERMINACIÓN DE LA NORMAL A UNA CURVA GEOMÉTRICA

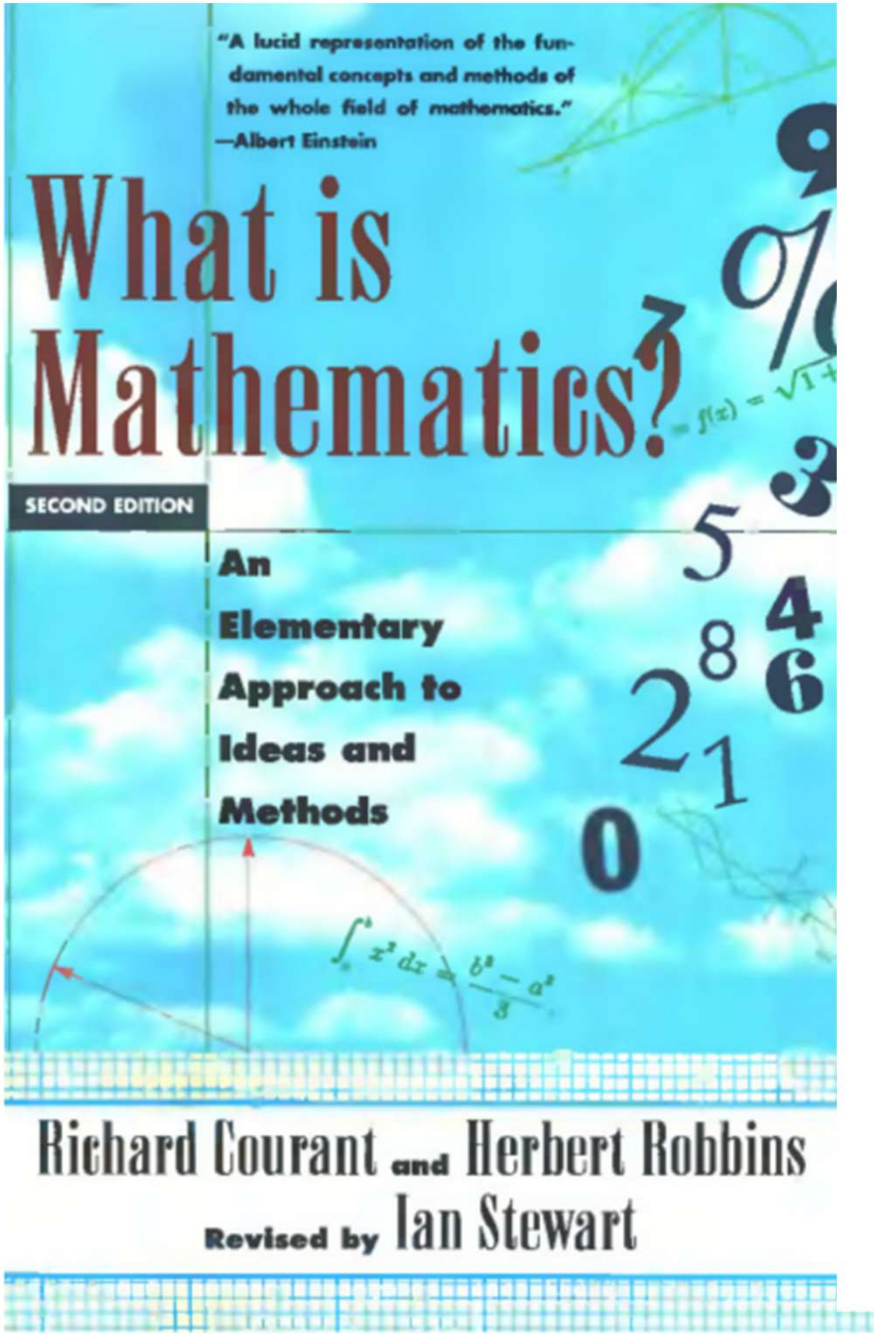
## FERMAT Y EL MÉTODO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

## REFLEXIONES FINALES

# INTRODUCCIÓN

# GEOMETRÍA ANALÍTICA
## (geometría cartesiana, geometría de coordenadas)

- Parte de las matemáticas que usa el **álgebra** para describir y analizar figuras **geométricas**.
- Estudio de la **geometría** de las figuras a partir de su representación y manipulación de **ecuaciones** describiendo su posición, configuración y separación.
- También se llama **geometría de coordenadas** porque los objetos son descritos como $n$-tuplas ($n = 2$ en el plano, $n = 3$ en el espacio) en un **sistema de coordenadas**.
- Estudio de la **geometría** usando un **sistema de coordenadas**.
- Enfoque de la geometría en el cual los objetos son descritos por **ecuaciones** (o inecuaciones) con la ayuda de un **sistema de coordenadas**.




go much farther. Not only length, but *every geometrical object and every geometrical operation can be referred to the realm of numbers*. The decisive steps in this arithmetization of geometry were taken as early as 1629 by Fermat (1601–1655) and 1637 by Descartes (1596–1650). The fundamental idea of analytic geometry is the introduction of "coördinates," that is, *numbers* attached to or coördinated with a *geometrical object* and characterizing this object completely. Known to most readers are the so-called rectangular or Cartesian coördinates which serve to characterize the position of an arbitrary point $P$ in a plane. We start with two fixed perpendicular lines in the plane, the "$x$-axis" and the "$y$-axis," to which we refer every point. These lines are regarded as directed number axes, and measured with the same unit. To each point $P$, as in Figure 12, two coördinates, $x$ and $y$, are assigned. These are

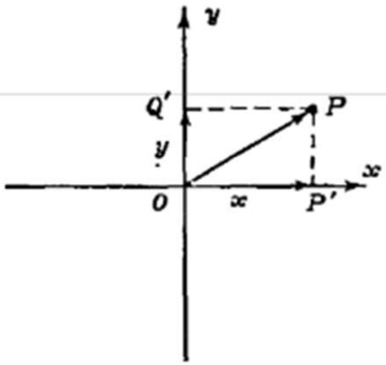



Fig. 12. Rectangular coördinates of a point.

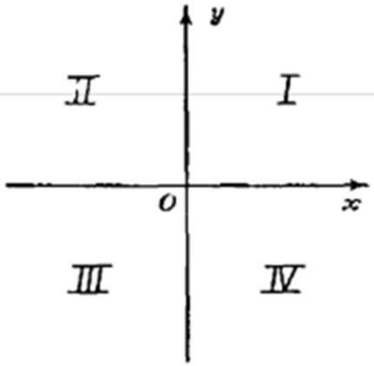



Fig. 13. The four quadrants.

obtained as follows: we consider the directed segment from the "origin" $O$ to the point $P$, and project this directed segment, sometimes called the "position vector" of the point $P$, perpendicularly on the two axes, obtaining the directed segment $OP'$ on the $x$-axis, with the number $x$ measuring its directed length from $O$, and likewise the directed segment $OQ'$ on the $y$-axis, with the number $y$ measuring its directed length from $O$. The two numbers $x$ and $y$ are called the *coördinates* of $P$. Conversely, if $x$ and $y$ are two arbitrarily prescribed numbers, then the corresponding point $P$ is uniquely determined. If $x$ and $y$ are both positive, $P$ is in the *first quadrant* of the coördinate system (see Fig. 13); if both are negative, $P$ is in the third quadrant; if $x$ is positive and $y$

# Sylvestre François Lacroix (1765-1843),
# *Traité du calcul différentiel et du calcul integral* (1797)

En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourroit appeler *Géométrie analytique*, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement.

La **geometría analítica** nació alrededor de 1637 con :

**René Descartes** (1596-1650) y **Pierre de Fermat** (1601-1665).

- Fermat: *Ad locos planos et solidos isagoge*.
- Descartes: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, con sus tres ensayos adjuntos, entre los cuales *La Géométrie*.

Réné Descartes (1596-1650)

Pierre de Fermat (1601-1665)

- Ambos presentaban técnicas para **relacionar el álgebra y la geometría**, para establecer la **correspondencia entre curvas del plano y ecuaciones** en dos variables.
- Interés por redescubrir las técnicas griegas "perdidas" del **análisis**.
- Familiarizados con el método de análisis-síntesis de los geómetras griegos, en particular, con el *Tesoro del Análisis* de **Pappus**.
- Problema del lugar geométrico de las **cuatro rectas** y sus generalizaciones.
- Sin embargo, Fermat y Descartes desarrollaron **enfoques marcadamente diferentes**.

# EL PROBLEMA DE LA TANGENTE

- **Herencia matemática clásica** del siglo XVI, a través de traducciones griegas y latinas de obras de Euclides, Arquímedes, Aristarco y otros.
- **Uso de procedimientos infinitos** y el estudio de objetos geométricos de dimensión infinita.
- Aparición del **álgebra** (especialmente el **lenguaje simbólico y el método analítico**) y su uso en la resolución de problemas.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900*. Oxford: Oxford University Press, p. 71

# EL PROBLEMA DE LA TANGENTE

- La **emergencia del cálculo diferencial-integral** a finales del siglo XVII aumenta drásticamente el alcance y potencia de las matemáticas.
- Se pueden identificar ideas en esa dirección a partir de la década de 1620, en los trabajos de Saint Vincent, **Fermat**, Roberval, Pascal, **Descartes**, Cavalieri, Torricelli, Wallis…

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900*. Oxford: Oxford University Press, p. 71

# EL PROBLEMA DE LA TANGENTE

Problemas clave que emergen a partir de los 1620s, para entender o mejorar el legado de la geometría griega y para explorar nuevos problemas:

¿Es posible determinar la longitud de una porción de curva?

¿Cómo se pueden determinar las áreas limitadas por curvas?

Dada una curva, ¿se puede determinar su **tangente** en un punto?

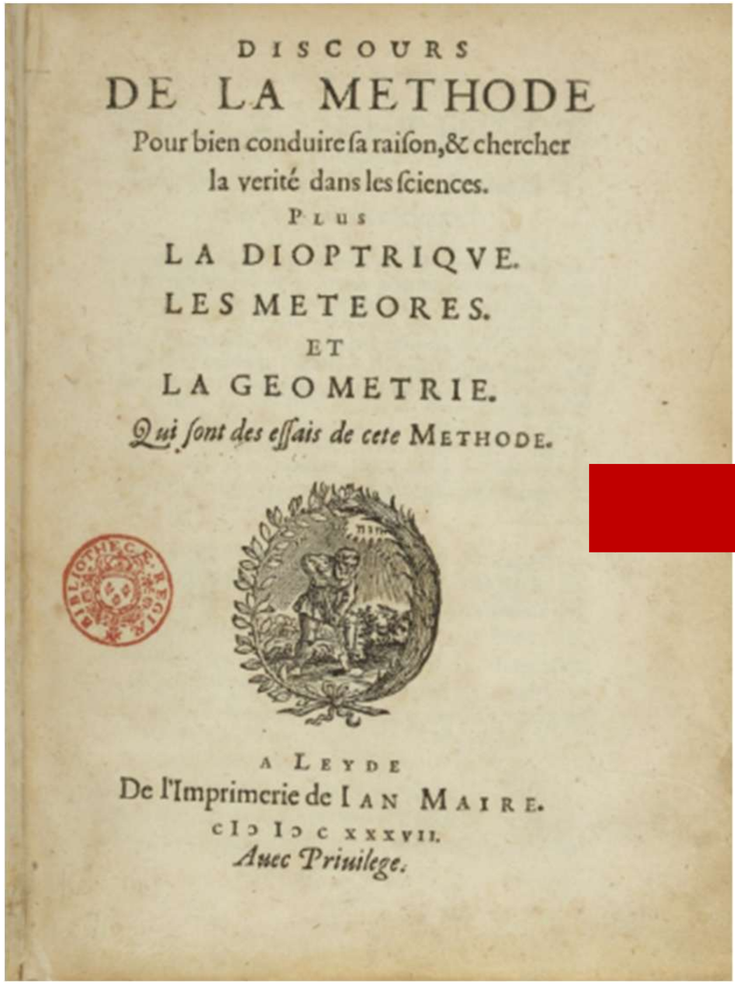
STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900*. Oxford: Oxford University Press, p. 71

# Mi objetivo:
# EL PROBLEMA DE LA “TANGENTE” según…

Réné Descartes (1596-1650)

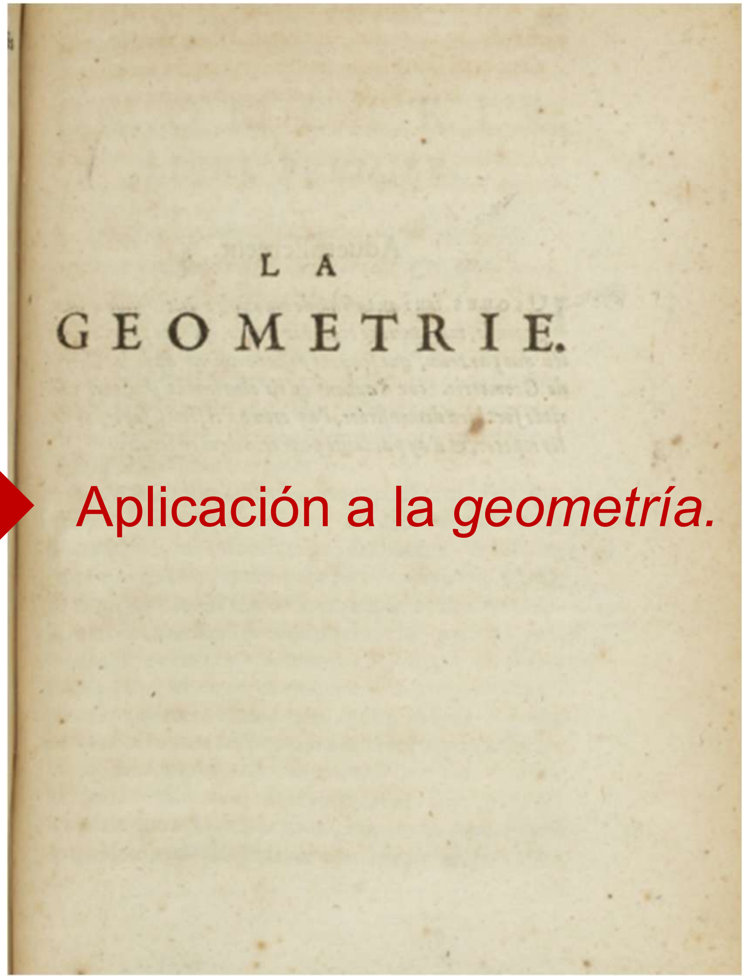
Pierre de Fermat (1601-1665)

# DESCARTES Y LA DETERMINACIÓN DE LA NORMAL A UNA CURVA GEOMÉTRICA



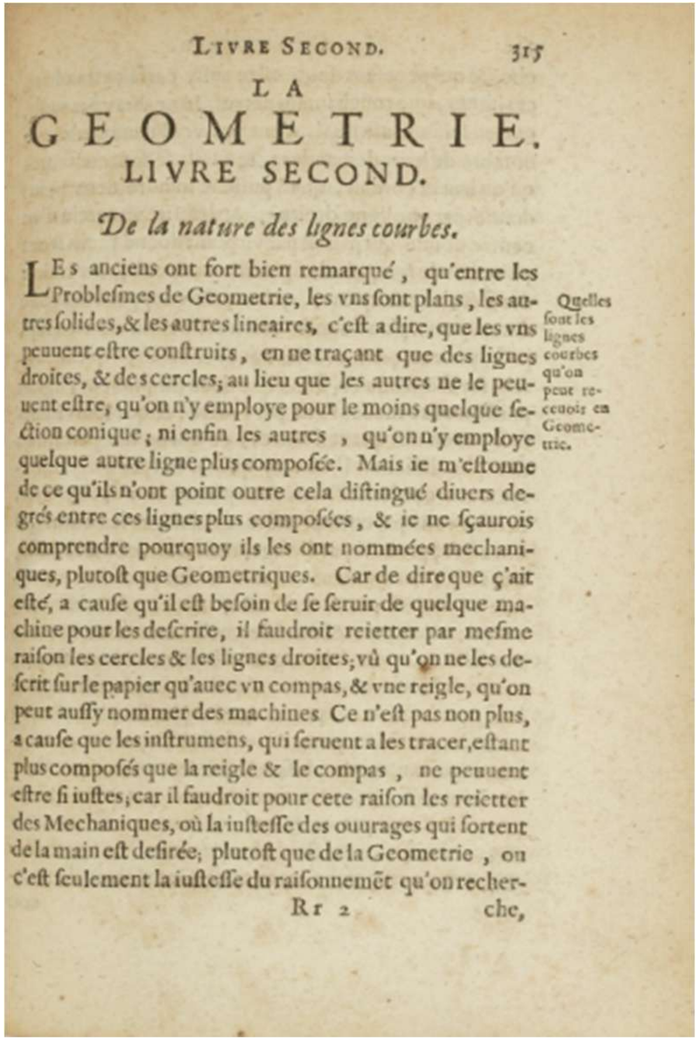
DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
*Qui sont des essais de cete* METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↄ Iↄ c xxxvii.
*Auec Priuilege.*



LA
GEOMETRIE.

Aplicación a la *geometría.*



LIVRE SECOND. 315

LA

GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

*De la nature des lignes courbes.*

LEs anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problesmes de Geometrie, les vns sont plans, les autres solides, & les autres lineaires, c'est a dire, que les vns peuuent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degrés entre ces lignes plus composées, & ie ne sçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutost que Geometriques. Car de dire que ç'ait esté, a cause qu'il est besoin de se seruir de quelque machine pour les descrire, il faudroit reietter par mesme raison les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les descrit sur le papier qu'auec vn compas, & vne reigle, qu'on peut aussy nommer des machines Ce n'est pas non plus, a cause que les instrumens, qui seruent a les tracer, estant plus composés que la reigle & le compas, ne peuuent estre si iustes; car il faudroit pour cete raison les reietter des Mechaniques, où la iustesse des ouurages qui sortent de la main est desirée; plutost que de la Geometrie, ou c'est seulement la iustesse du raisonnemẽt qu'on recher-

Quelles sont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

Rr 2 che,

**Libro I.** *De los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas.*

**Libro II.** *De la naturaleza de las líneas curvas.*

**Libro III.** *De la construcción de problemas sólidos o más que sólidos.*

## **Libro II.** *De la naturaleza de las líneas curvas*

- La naturaleza geométrica de las líneas curvas.
- El problema general de Pappus.
- La determinación de les normales a una curva geométrica.
- Óvalos.

## **Libro II.** *De la naturaleza de las líneas curvas*

- La naturaleza geométrica de las líneas curvas.

**Geométricas:** si admiten expresión algebraica.

Según **género**:

Primer género (1r y 2º grado).

Segundo género (3r y 4º grado).

Tercer género (5º y 6º grado).

…

**Mecánicas:** si no admiten expresión algebraica adecuada.

## **Libro II.** *De la naturaleza de las líneas curvas*

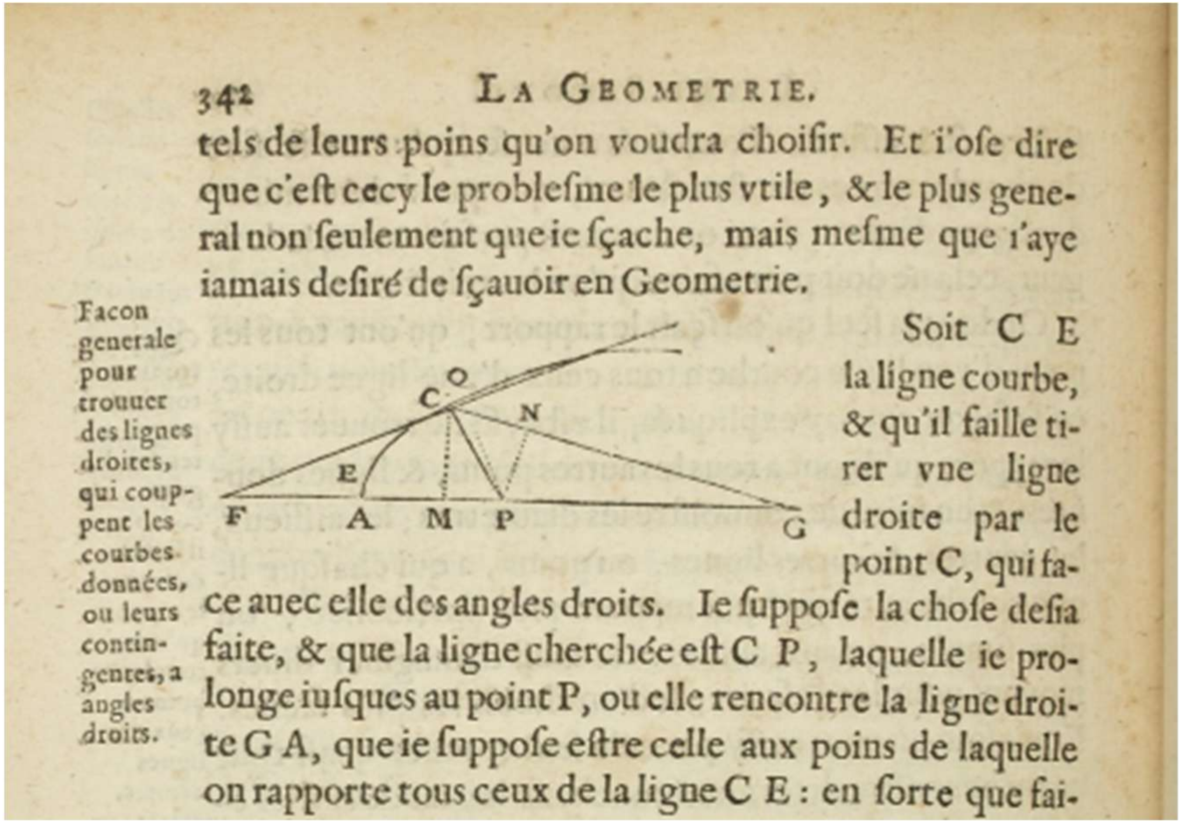
- La naturaleza geométrica de las líneas curvas.
- El problema general de Pappus.
- La **determinación de les normales** a una curva geométrica.
- Óvalos.

***Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos punto en ángulos rectos.***

Y, por último, en lo que respecta a todas las otras propiedades que pueden atribuirse a las líneas curvas, ellas no dependen más que de la magnitud de los ángulos que ellas forman con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las **cortan en ángulo recto**, en los puntos en que se encuentran con aquéllas con las que forman los ángulos que se quieren medir, o, lo que aquí tomo como igual, en que ellas cortan sus **contingentes**, la magnitud de esos ángulos no es más difícil de encontrar que si ellos estuvieran comprendidos entre dos líneas rectas.

Y me atrevo a decir que es éste el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.

*Manera general para encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas, o sus contingentes, en ángulos rectos.*





tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

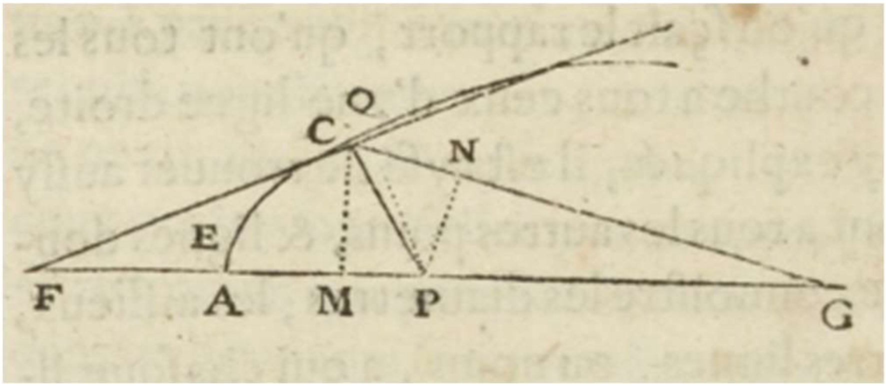
Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que fai-

*Manera general para encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas, o sus contingentes, en ángulos rectos.*

on rapporte tous ceux de la ligne C E : en ſorte que faiſant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre $x$ & $y$. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay $ss$, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, &



## *Manera general para encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas, o sus contingentes, en ángulos rectos.*

$\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées $x$ ou $y$. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'$x$, & le quarré de cete ſomme au lieu d'$xx$, & ſon cube au lieu d'$x^3$, & ainſi des autres, ſi c'eſt $x$ que ie veuille oſter; oubien

bien ſi c'eſt $y$, en mettant en ſon lieu $x + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete ſomme, au lieu d'$yy$, ou $y^3$ &c. De façon qu'il reſte touſiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne ſeule quantité indeterminée, $x$, ou $y$.

# DETERMINACIÓ DE LA NORMAL

$MA = y$, $CM = x$

Equació que explica la relació entre $x$, $y$

$PC = s$, $PA = v$, $PM = v - y$

$\Delta PMC$ triangle rectangle

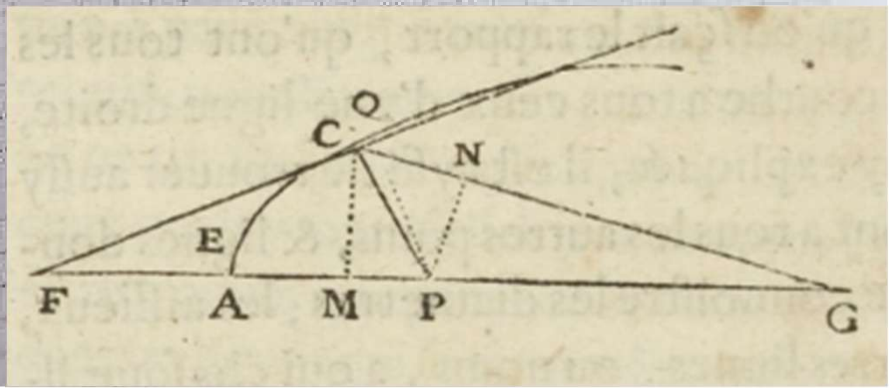
$$ss = xx + vv - 2vy + yy$$

Equació de circumferència de centre P i radi s

$$x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$$

o bé

$$y = v + \sqrt{ss - xx}$$

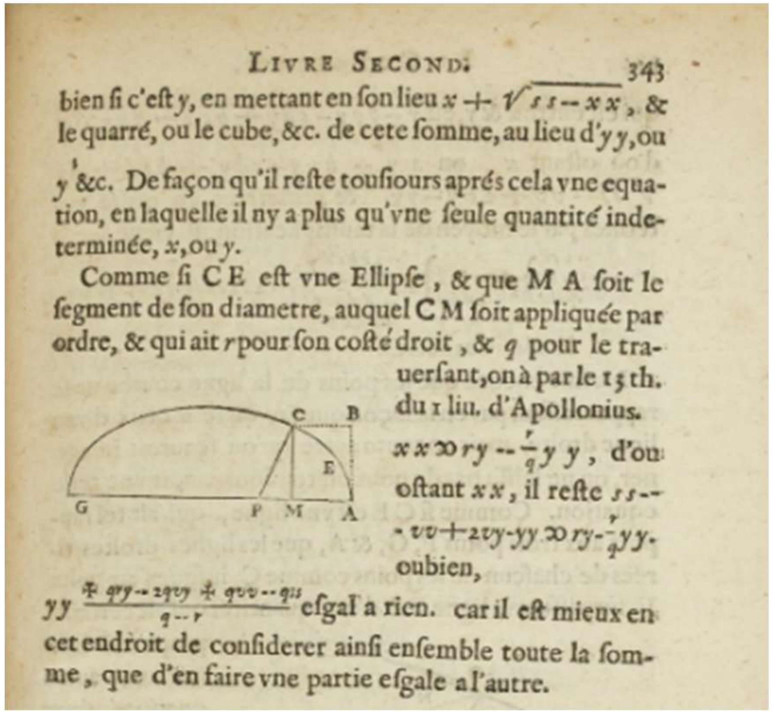


*De la geometría al álgebra…*

- ✓ Problema geométrico: determinar la recta normal a una curva algebraica en un punto.
- ✓ Se supone resuelto el problema → ecuación de una circunferencia (determinación algebraica).
- ✓ Se establece la ecuación que determinará el punto que se supone conocido.
- ✓ Hay que analizar el comportamiento de esta intersección en los dos niveles de lenguaje: geométrico y algebraico.

PLA & VIADER (1999). *René Descartes. La geometria*. IEC, p. 76

# Un ejemplo: Elipse



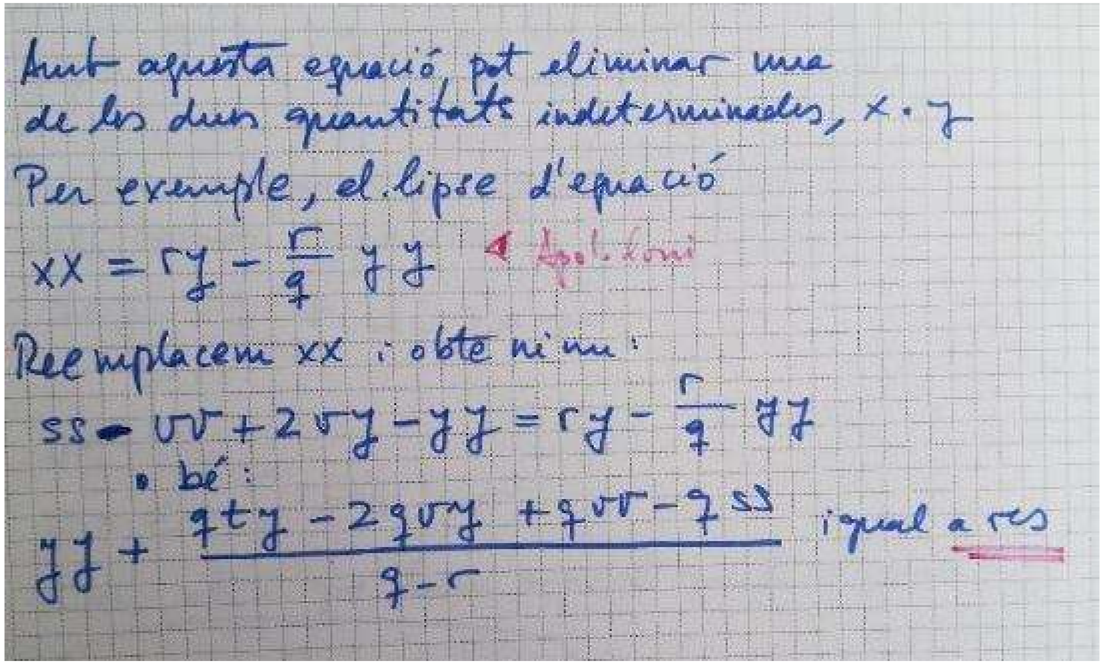
LIVRE SECOND. 343

bien si c'est $y$, en mettant en son lieu $x + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'$yy$, ou $y^3$ &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, $x$, ou $y$.

Comme si CE est vne Ellipse, & que MA soit le segment de son diametre, auquel CM soit appliquée par ordre, & qui ait $r$ pour son costé droit, & $q$ pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'ou ostant $xx$, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.





Amb aquesta equació pot eliminar una de les dues quantitats indeterminades, x o y

Per exemple, el·lipse d'equació

$xx = ry - \frac{r}{q} yy$ ◄ Apol·loni

Reemplacem xx i obtenim:

$ss - vv + 2vy - yy = ry - \frac{r}{q} yy$

o bé:

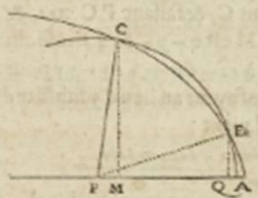
$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ igual a res

Or aprés qu'on à trouué vne telle equation , au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantités $x$, ou $y$, ou $z$, qui sont desia données, puisque le point C est donné, on la doit employer a trouuer $v$, ou $s$, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe C E, sans la coupper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point

*Vuelta a la geometría:*
Si la recta es normal, la circunferencia necesariamente cortará la curva en un único punto (**punto doble**).
Así, tocará la curva pero sin cortarla.



A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non ſeulement au point C, mais auſſy neceſſairement en quelque autre. Puis il faut auſſy conſiderer, que lorſque ce cercle couppe la ligne courbe CE, l'equation par laquelle on cherche la quantité $x$, ou $y$, ou quelque autre ſemblable, en ſuppoſant PA & PC eſtre connuës, contient neceſſairement deux racines, qui ſont ineſgales. Car par exemple ſi ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré EQ parallele a CM, les noms des quantités indeterminées $x$ & $y$, conuiendront auſſy bien aux lignes EQ, & QA, qu'a CM, & MA; puis PE eſt eſgale a PC, a cauſe du cercle, ſi bien que cherchant les lignes EQ & QA, par PE & PA qu'on ſuppoſe comme données, on aura la meſme equation, que ſi on cherchoit CM & MA par PC, PA. d'où il ſuit euidemment, que la valeur d'$x$, ou d'$y$, ou de telle autre quantité qu'on aura ſuppoſee, ſera double en *
cete equation, c'eſt a dire qu'il y aura deux racines ineſgales entre elles; & dont l'vne ſera CM, l'autre EQ, ſi c'eſt $x$ qu'on cherche; oubien l'vne ſera MA, & l'autre QA, ſi c'eſt $y$. & ainſi des autres. Il eſt vray que ſi le point E ne ſe trouue pas du meſme coſté de la courbe que le point C, il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui ſoit vraye, & l'autre ſera renuerſée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, ſont proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines;



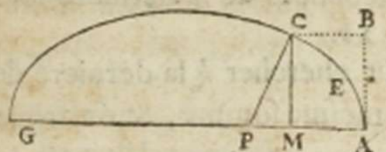



*Vuelta al álgebra:*
Para que una circunferencia *corte* una curva, la ecuación resultante ha de tener dos raíces diferentes.*
Para que una circunferencia *toque* una curva, la ecuación ha de tener una raíz doble.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy dessus, a sçauoir

$$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q-r} —$$

doit auoir la mesme forme que celle qui se produist en faisant $e$ esgal a $y$, & multipliant $y - e$ par soy mesme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en sorte qu'on peut comparer separement chascun de leurs termes, & dire que puisque le premier qui est $yy$ est tout le mesme en l'vne qu'en l'autre, le second qui est en l'vne $\frac{qry - 2qvy}{q-r}$ est esgal au secōd de l'autre qui est $-2ey$, d'où cherchant la quantité $v$ qui est la ligne P A, on à




$v \infty e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, oubiē a cause que nous auons supposé $e$ esgal a $y$, on a $v \infty y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et

 ainsi

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q-r} = yy - 2ey + ee$$

Podem comparar per separat cada un dels termes respectius.

$$\frac{qry - 2qvy}{q-r} = -2ey$$

Criterio de igualdad de polinomios.

$v$?

$$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$$

o bé, atès que hem suposat que $e$ és igual a $y$:

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$$

[347-348

# GEOMETRÍA CARTESIANA POSTCARTESIANA

1649: Versión latina editada por **Frans Van Schooten** (1615-1660), con comentarios de éste y de **Florimond Debeaune** (1601-1652).

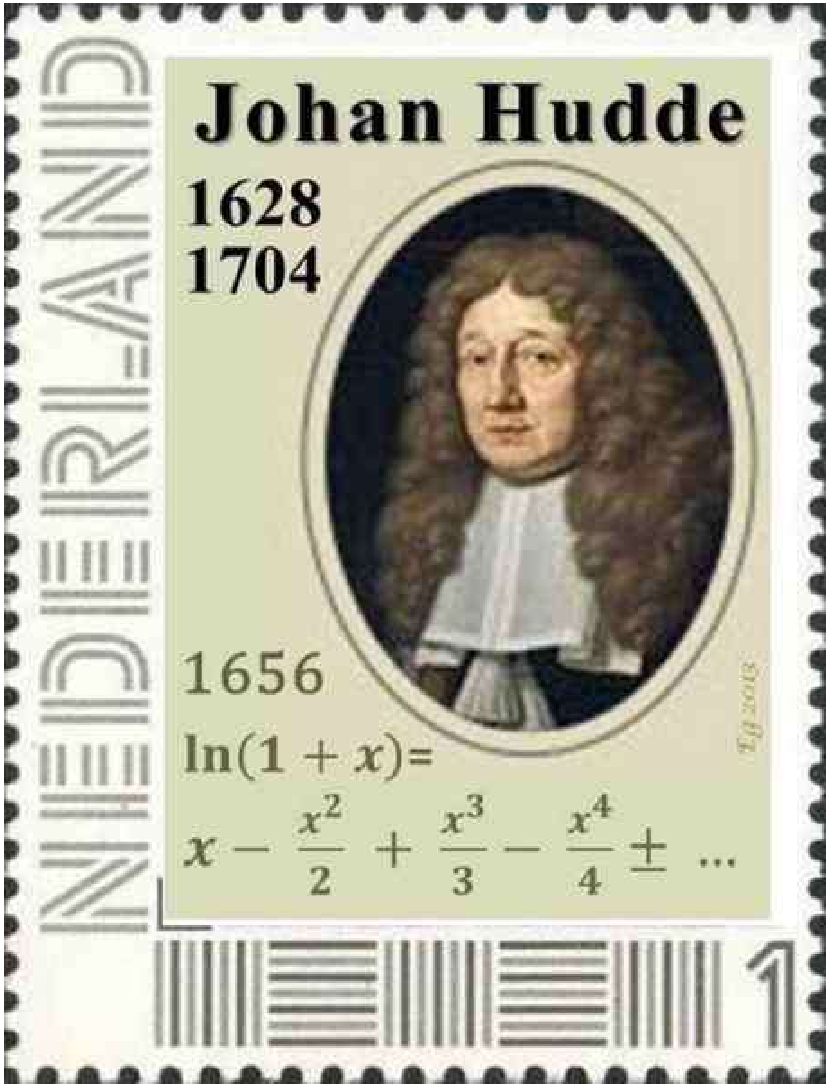
1659-1661: Con comentarios y ampliada.

- *Elementa curvarum linearum*, tratado de secciones cónicas de **Jan de Witt** (1623-1672)
- **Jan Hudde** (1628-1704): "Epistola prima de Redvctione Æqvationvm“ y "Epistola secvnda de Maximus et Minimus“ (1658). Primeros algoritmos de construcción de curvas algebraicas, de manera rutinaria, sin recurrir a construcciones adaptadas a cada cuva en particular.

GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum NOTIS
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Mathescos Professoris,
Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,
Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.
AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIↃ IↃC LIX.

JOHANNIS HUDDENII
EPISTOLA PRIMA
DE
REDVCTIONE
ÆQVATIONVM.

JOHANNIS HUDDENII
EPISTOLA SECVNDA,
DE
MAXIMIS ET
MINIMIS.



# *REGLA DE HUDDE*

Si dos raíces de una ecuación son iguales, y se multiplica por una progresión aritmética cualquiera; es decir, el primer término de la ecuación por el primer término de la progresión, el segundo término de la ecuación por el segundo término de la progresión, etc, digo que el producto será una ecuación en la cual las raíces mencionadas vuelven a aparecer.

# *REGLA DE HUDDE. Versión moderna*

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad F^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (a + ib) x^i$$

Si *e* es raíz doble de *F*(*x*) entonces es raíz de *F**(*x*).

Dem:

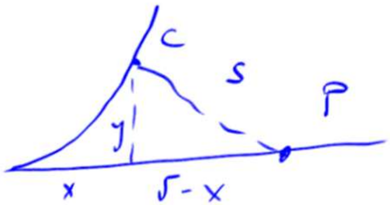
$$F(x) = (x-e)^2 \sum c_i x^i = \sum c_i (x^{i+2} - 2ex^{i+1} + e^2 x^i)$$

$$A_i = a + bi$$

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \sum c_i (A_{i+2} x^{i+2} - 2eA_{i+1} x^{i+1} + e^2 A_i x^i) \\ &= \sum c_i [(A_i + 2b)x^2 - 2e(A_i + b)x \quad + e^2 A_i] x^i \\ &= \sum c_i [A_i (x-e)^2 + 2bx(x-e)] x^i \end{aligned}$$

EDWARDS (1979). *The Historical Development of the Calculus*, pp. 127-128

# NORMAL A $y=x^2$ "a la Descartes"




Circumferència de centre P i radi S: $y^2+(r-x)^2=S^2$

1) Intersecció circumferència – paràbola:

$$x^4+(r-x)^2=S^2 \longrightarrow x^4+(r-x)^2-S^2=0$$

2) Imposem que les dues arrels siguin iguals:

$$x^4+r^2+x^2-2rx-S^2=(x-e)^2(x^2+ax+b)=$$

$$=x^4+ax^3+bx^2+e^2x^2+ae^2x+be^2-2ex^3-2aex^2-2ebx$$

$$\begin{cases} a = 2e \\ b + e^2 - 2ae = 1 \\ ae^2 - 2eb = -2v \\ v^2 - s^2 = be^2 \end{cases}$$

$$v = 2e^3 + e$$

$$\boxed{v = 2x^3 + x}$$

HUDDE !!

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 = F(x)$$

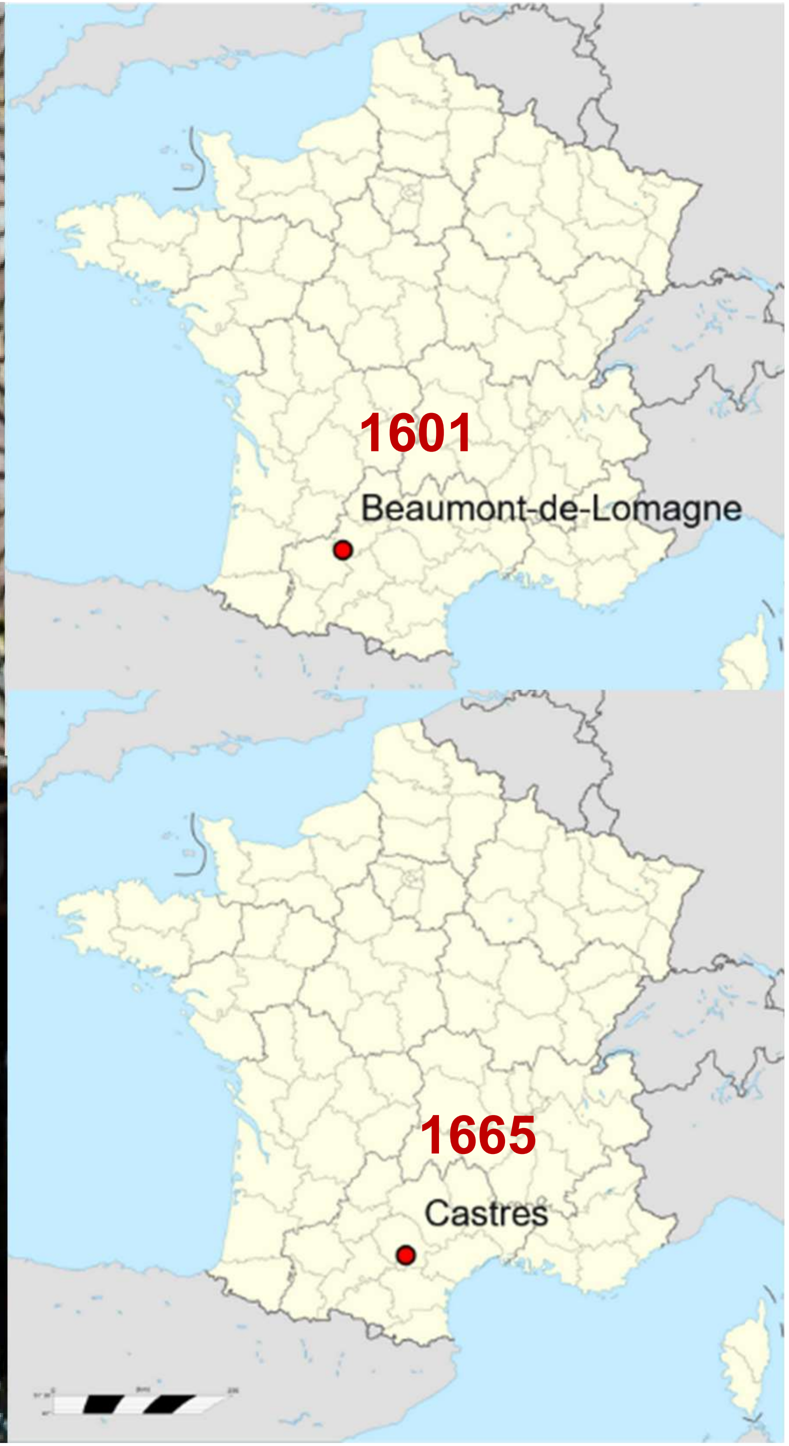
$$F^*(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2vx$$

$a = 0$
$b = 1$

$$4x^4 + 2x^2 - 2vx = 0 \longrightarrow \boxed{v = 2x^3 + x}$$

# FERMAT Y EL MÉTODO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS


A
P^re FERMAT
né à Beaumont le 20 Août 1601.
DESPEYROUS
Père et Fils
1882.


1601
Beaumont-de-Lomagne
1665
Castres

# Pierre Fermat (1601-1665)

Estudia leyes en la Universidad de Toulouse.

1625: En Burdeos empieza a interesarse por cuestiones matemáticas (D'Espagnet, Beaugrand), como los trabajos de **Viète** y la reconstrucción de *Plane Loci* de **Apolonio**.

Empieza a trabajar en su método de máximos y mínimos.

1631: Derecho civil en la Universidad de Orléans.

A partir de 1631: Abogado y magistrado del Parlamento de Toulouse.

1632: Conoce a **Pierre de Carcavi** (1600-1684).

# Pierre de Fermat (1601-1665)

1636: **Marin Mersenne** (1588-1648), a través del cual entra en contacto con la comunidad matemática.

1637: Envía a sus colegas de París su memoria *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*.

## Nuevas ideas sobre geometria analítica en su *Isagoge*

Siempre que aparecen dos magnitudes desconocidas en una **ecuación** final, tenemos un **lugar geométrico**, siendo la extremidad de una de las magnitudes desconocidas la que describe una línea recta o una curva, cuyos puntos están determinados por el movimiento de un extremo de un segmento de línea variable, cuyo otro extremo se mueve a lo largo de una línea recta fija.

## Problema del lugar geométrico de las cuatro líneas

Si, dadas cualquier cantidad de líneas en posición, se trazan líneas desde un mismo punto hacia cada una de ellas con ángulos dados, y si la suma de los cuadrados de todas las líneas trazadas es igual a una superficie dada, entonces el punto se encontrará sobre una sección cónica determinada en posición.

Fermat dejó la solución del problema para el lector.

# Marin Mersenne (1588-1648)

Principal artífice de la **circulación de avances matemáticos** que se estaban produciendo en Europa:

- Organiza reuniones eruditas en París.
- Facilita contactos por correspondencia (Galileu, Cavalieri, Torricelli, Roberval, Fermat, Descartes).
- Facilita la circulación de manuscritos.
- Propone problemas. Por ejemplo, área de la cicloide (Roberval).

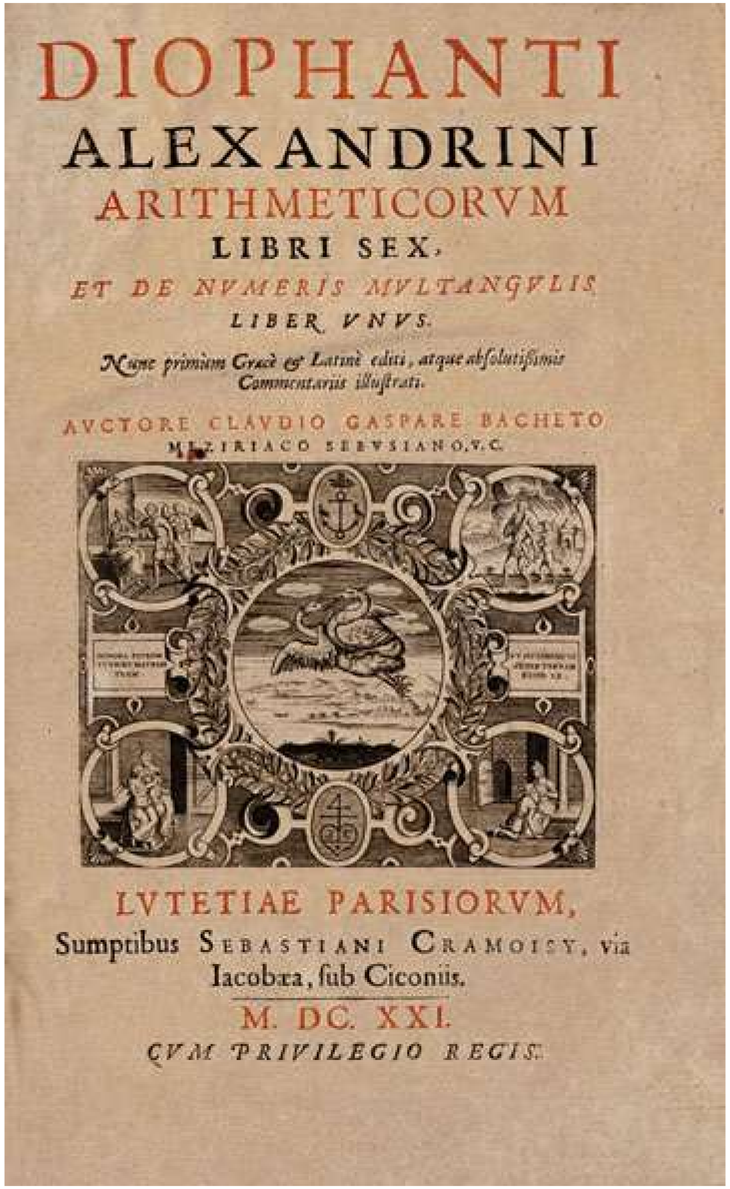
# Pierre de Fermat (1601-1665)

1636: **Marin Mersenne** (1588-1648), a través del cual entra en contacto con la comunidad matemática.

1637: Envía a sus colegas de París su memoria *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*.

1629-1644: Estudios sobre máximos y mínimos, y tangentes.

1643-1654: Teoría de números. *Aritmética* de Diofanto. Último teorema de Fermat.




Edición llatina de 1621 de la *Arithmetica* de **Diofanto de Alejandría**,
de Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638)

1621



teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις̅ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις̅ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λεῖψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ις̅ μο πλευρά. ἔστω ςς β̅ λεῖψει μο δ̅. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ̅ μο ις̅ [λεῖψει ςς ις̅.] ταῦτα ἴσα μονάσι ις̅ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε̅ ἴσαι ἀριθμοῖς ις̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̅ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ̅ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ̅ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ̅ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις̅. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit ergo primi latus $\frac{16}{5}$.

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις̅ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ςς̅ ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ςς̅ ὅσων δήποτε λεῖψει μο ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ςς β̅ λεῖψει μο δ̅. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ̅ μο ις̅ λεῖψει ςς ις̅. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μο ις̅. δυνάμεις ἄρα ε̅ μο ις̅ λεῖψει ςς ις̅ ἴσαι μο ις̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̅ πέμπτων. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ις̅ πέμπτων.



1670



interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adiectis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

[illegible]

*IN QVÆSTIONEM VII.*

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter vero $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. [illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

*CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius vero quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille vero 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις̅ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. [illegible]

1621

## Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

### QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fin…

Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

**¿Cómo dividir un cuadrado en dos cuadrados?**

Es imposible escribir un cubo como suma de dos cubos, o escribir una cuarta potencia como suma de dos cuartas potencias, o escribir, en general, cualquier potencia mayor que dos como suma de dos potencias iguales. Tengo una demostración realmente maravillosa de esta afirmación, pero no cabe en este margen, es demasiado estrecho.

1670

## Arithmeticorum Liber II. 61

### IN QVÆSTIONEM VII.

### QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato.

### OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

*Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

### QVÆSTIO IX.

RVRSVS oportet quadratum 16 diuidere in duos quadratos.

# Pierre de Fermat (1601-1665)

1636: **Marin Mersenne** (1588-1648), a través del cual entra en contacto con la comunidad matemática.

1637: Envía a sus colegas de París su memoria *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*.

1629-1644: Estudios sobre máximos y mínimos, y tangentes.

1643-1654: Teoría de números. *Aritmética* de Diofanto. Último teorema de Fermat.

1654: Probabilidad. Correspondencia con **Blaise Pascal** (1623-1662).

1659: Rectificación de la hipérbola.

1679: Su hijo Samuel edita la *Varia Opera*.

## MEMORIAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1629-1636: *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum (Método para la investigación de máximos y mínimos y de las tangentes a las líneas curvas).*

# MEMORIAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1629-1636: *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum (Método para la investigación de máximos y mínimos y de las tangentes a las líneas curvas).*

1637

1638

# MEMORIAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1629-1636: *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum (Método para la investigación de máximos y mínimos y de las tangentes a las líneas curvas).*

1638: *Ad eamdem methodum… (Sobre el mismo método de máximos y mínimos).*

c. 1640: *Analytica eiusdem methodi investigatio (Investigación analítica del método de máximos y mínimos).*

# METHODUS

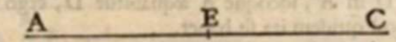
## Ad disquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; statuatur quilibet quæstionis terminus esse A, sive planum, sive solidum, aut longitudo, prout proposito satisfieri par est, & inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu ut libet iuuolutis; Ponatur rursus idem qui prius esse terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus. duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra (ab E, vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione sub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut si ex unâ parte nihil superest æquentur sane, quod eodem recidit, negata ad firmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit ualorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subijcimus

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang. A E C, sit maximum; Recta A C, dicatur B.




ponatur par altera B, esse A, ergo reliqua erit B, − A, & rectang. sub segmentis erit B, in A, − A$^2$ quod debet inueniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, + E, ergò reliqua erit B, −, A − E, & rectang. Sub. segmentis erit B, in A, −, A$^2$ + B, in E, $^2$E in A, − E, quod debet adæquati superiori rectang. B, in A, − A$^2$, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E$'$ + E$^2$, & omnibus per E, divisis B, adæquabitur $^2$A + E, elidatur E, B, æquabitur $^2$A, igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propositi, nec potest generalior dari methodus.

## De Tangentibus linearum curvarum.

AD superiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

# MÉTODO PARA LA INVESTIGACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS (*METHODUS*)

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

Sea $a$ una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).

Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de $a$ en términos que pueden ser de cualquier grado.

Se substituirá a continuación la incógnita original $a$ por $a + e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de $a$ y $e$, en términos que pueden ser de cualquier grado.

Se *adigualará*, para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.

# MÉTODO PARA LA INVESTIGACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS (*METHODUS*)

Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de $e$ o de una de sus potencias.

Se dividirán todos los términos por $e$, o por alguna potencia superior de $e$, de modo que desaparecerá la $e$, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la $e$ o una des sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

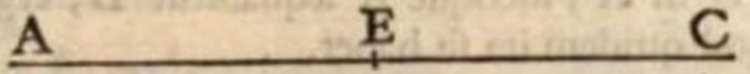
La resolución de esta última ecuación dará el valor de $a$, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

# EJEMPLO

qua cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris reſolutionis veſtigiis innoteſcet.

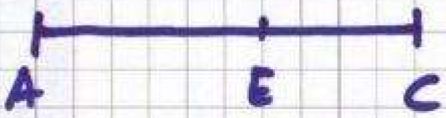
Exemplum ſubijcimus

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang. A E C, ſit maximum; Recta A C, dicatur B.




ponatur par altera B, eſſe A, ergo reliqua erit B, — A, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A, $-A^2$ quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B, eſſe A, + E, ergò reliqua erit B, —, A — E, & rectang. Sub. ſegmentis erit B, in A, —, $A^2$ + B, in E, ${}^2E$ in A, — E, quod debet adæquati ſuperiori rectang. B, in A, — $A^2$, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in $E^2 + E^2$, & omnibus per E, diviſis B, adæquabitur ${}^2A$ + E, elidatur E, B, æquabitur ${}^2A$, igitur B, bifariam eſt dividenda, ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

# EJEMPLO




$E$? $AE \times EC$ MAX

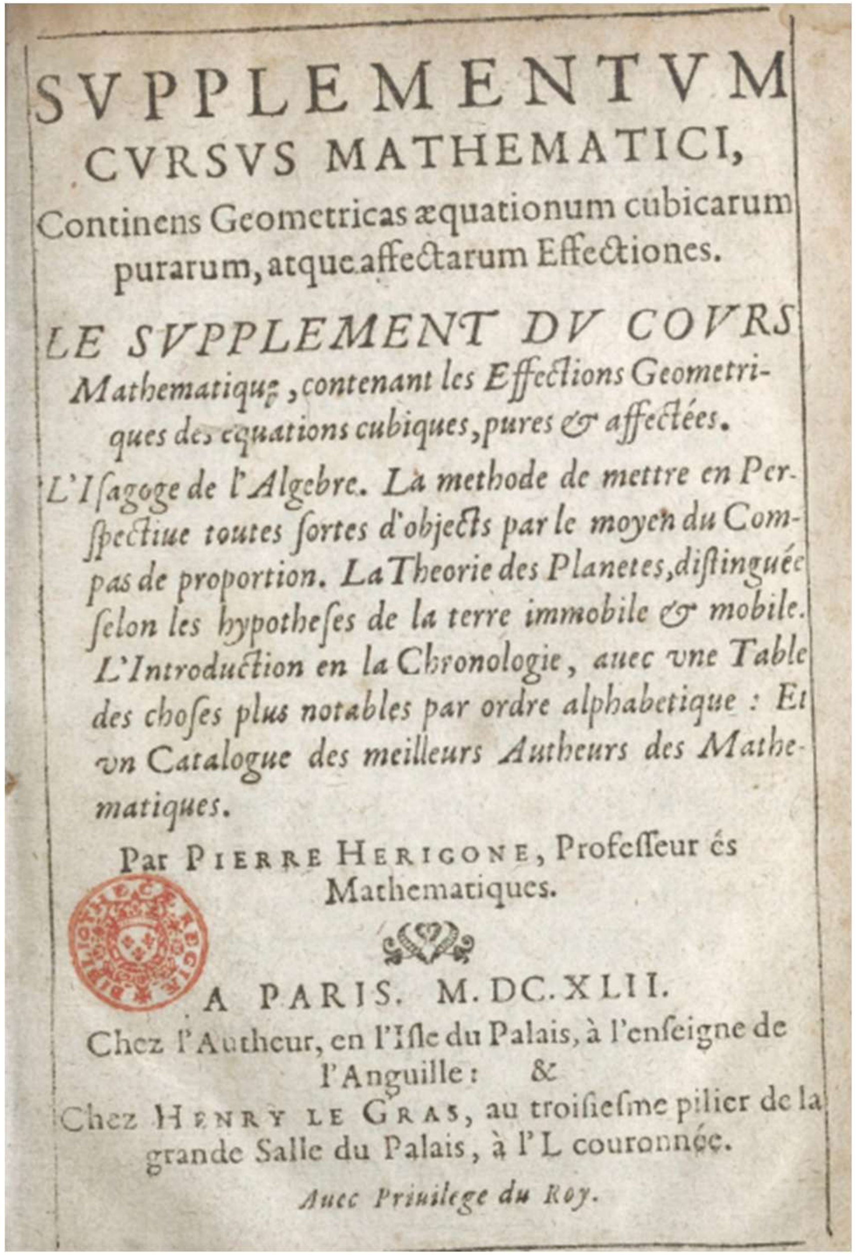
$AC = b \qquad a\,,\ b-a \rightarrow ba - a^2$ MAX?

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} a \rightarrow a+e \\ b-a \rightarrow b-a-e \end{array}\right\} \rightarrow ba - a^2 + be - 2ae - e^2$$

$$(2)\quad ba - a^2 \sim ba - a^2 + be - 2ae - e^2$$ "adequate"

$$(3)\quad be \simeq 2ae + e^2$$

$$(4)\quad b \simeq 2a + e \xrightarrow{e=0} b = 2a \rightarrow \boxed{a = b/2}$$



SVPPLEMENTVM
CVRSVS MATHEMATICI,
Continens Geometricas æquationum cubicarum purarum, atque affectarum Effectiones.

*LE SVPPLEMENT DV COVRS Mathematique, contenant les Effections Geometriques des equations cubiques, pures & affectées.*

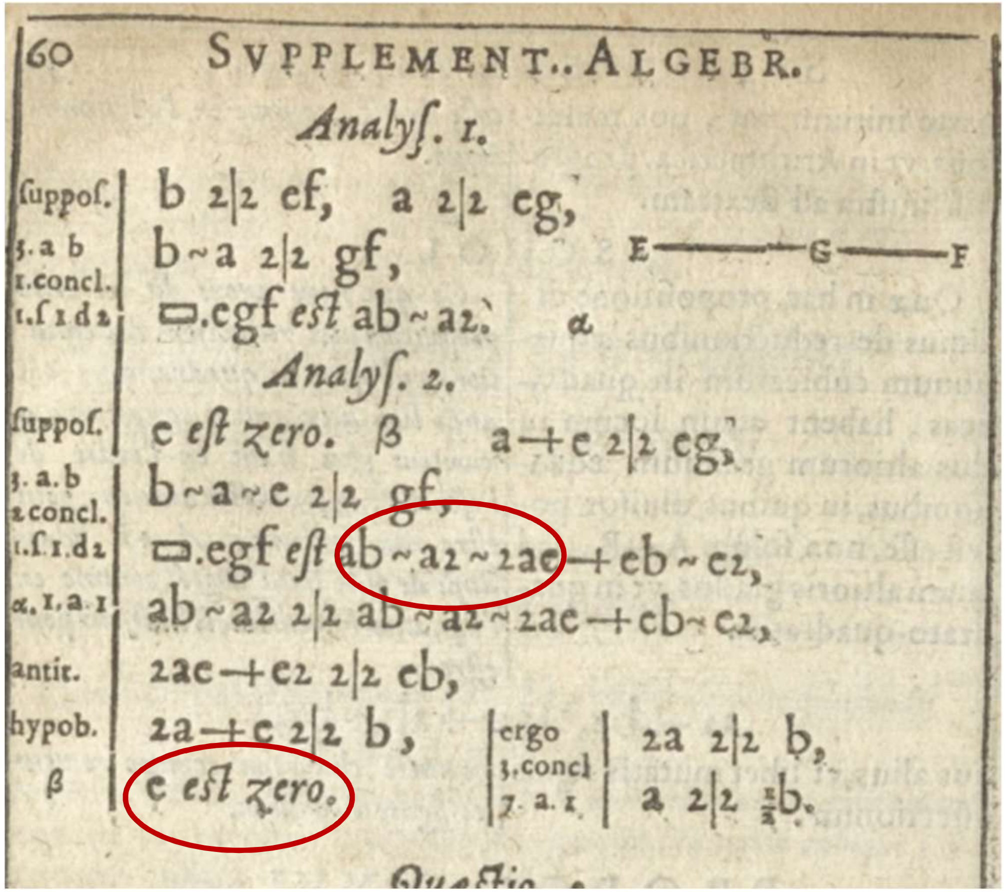
*L'Isagoge de l'Algebre. La methode de mettre en Perspectiue toutes sortes d'objects par le moyen du Compas de proportion. La Theorie des Planetes, distinguée selon les hypotheses de la terre immobile & mobile. L'Introduction en la Chronologie, auec vne Table des choses plus notables par ordre alphabetique : Et vn Catalogue des meilleurs Autheurs des Mathematiques.*

Par PIERRE HERIGONE, Professeur és Mathematiques.

A PARIS. M.DC.XLII.

Chez l'Autheur, en l'Isle du Palais, à l'enseigne de l'Anguille : & Chez HENRY LE GRAS, au troisiesme pilier de la grande Salle du Palais, à l'L couronnée.

*Auec Priuilege du Roy.*





*Analys. 1.*

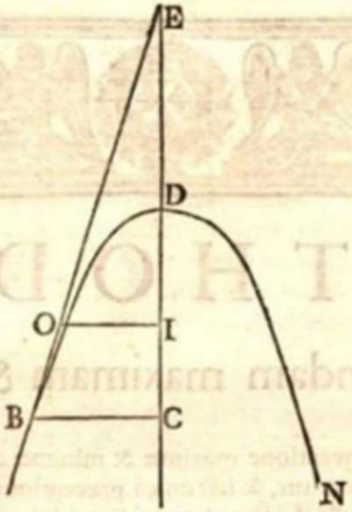
| | |
|---|---|
| suppos. | b 2\|2 ef, a 2\|2 eg, |
| 3.a b 1.concl. | b~a 2\|2 gf, E — G — F |
| 1.s 1 d 2 | □.egf *est* ab~a2. α |

*Analys. 2.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| suppos. | e *est zero.* β a+e 2\|2 eg, | | |
| 3.a.b 2 concl. | b~a~e 2\|2 gf, | | |
| 1.s.1.d2 | □.egf *est* ab~a2~2ae+eb~e2, | | |
| α.1.a.1 | ab~a2 2\|2 ab~a2~2ae+eb~e2, | | |
| antit. | 2ae+e2 2\|2 eb, | | |
| hypob. | 2a+e 2\|2 b, | ergo 3.concl 7.a.1 | 2a 2\|2 b, a 2\|2 ½b. |
| β | e *est zero.* | | |

Pierre Hérigone (ca.1580-1643),
*Cursus Mathematicus* (1634-1642)

# De las tangentes a las líneas curvas



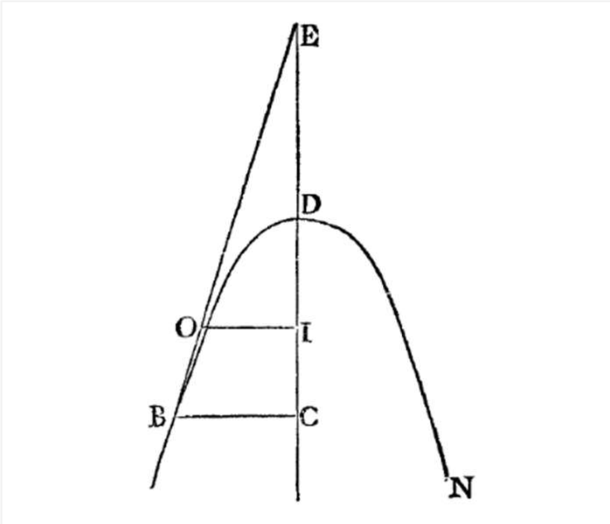

Sit data, verbi gratià, Parabole B D N, cujus vertex D, diameter D C, & punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta B E, tangens parabolen, & in puncto E, cum diametro concurrens, ergo sumendo quodlibet punctum O I, in recta B E, & ab eo ducendo ordinatam O I, à puncto autem B, ordinatam B C major erit proportio C D, ad D I, quàm quadrati B C, ad quadratum O I, quia punctum O, est extra parabolen, sed propter similitudinem triangulorum, ut B C, quad. ad O I, quad. ita C E, quad. ad I E, quad. Major igitur erit proportio C D ad D I, quàm quadrati C E ad quad. I E, Cum autem punctum B detur, datur applicata B C, ergo punctum C datur etiam C D, Sit igitur C D, æqualis D, datæ. Ponatur C E, esse A, ponatur C I esse E, ergo D, aut D – E habebit majorem rationem, quàm $A^2$ ad $A^2 + E^2 - A$, in E. Et ducendo inter se medias & extremas D in $A^2$ + D in $E^2$ – D in A in E, majus erit quàm D, in $A^2$ – $A^2$ in E, Adæquentur igitur juxta superiorem methodum, demptis itaque communibus D, in $E^2$ – D, in A in E adæquabitur – $A^2$ in E, aut quod idem est, D in $E^2$, + $A^2$ in E, adæquabitur D in A in E, Omnia dividantur per E, ergo D in E + $A^2$ adæquabitur D in A, elidatur D in E, ergo $A^2$ æquabitur D in $A^2$, ideoque A æquabitur D, ergo C E, probavimus duplam ipsius C D, quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus, imò ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi, ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis & rectis comprehensis, & in solidis invenimus, & multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat. De quadraturis spatiorum sub lineis curvis & rectis contentorum, imò & de proportione solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis & altitudinis, fusè cum Domino de Roberval egimus.

## De las tangentes a las líneas curvas

Nosotros reconducimos al método precedente la invención de las tangentes en puntos dados de curvas cualesquiera.

(…)




Supongamos, por ejemplo, una parábola $BDN$ dada de vértice $D$ y diámetro $DC$. Consideremos un punto dado $B$ de la parábola, al cual trazamos la recta $BE$, tangente a la parábola, que corta el diámetro en el punto $E$.

Si se toma sobre la recta BE un punto cualquiera $O$, desde el que se traza la ordenada $OI$, al mismo tiempo que la ordenada $BC$ desde el punto $B$, se tendrá:

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$$

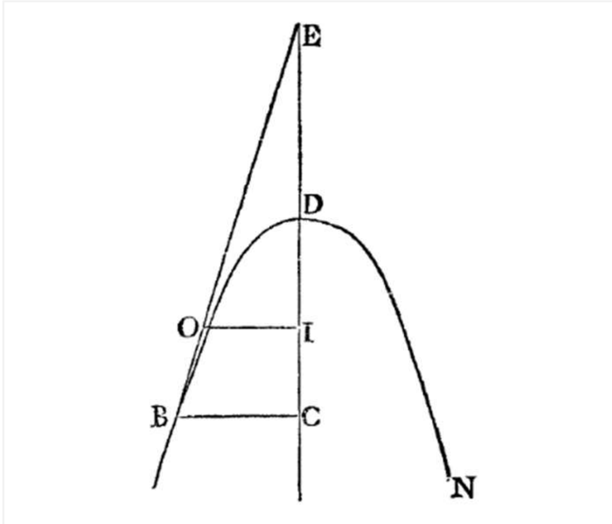
puesto que el punto $O$ es exterior a la parábola.

Ahora bien, a causa de la semejanza de los triángulos,

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$$

Por tanto,

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$$




El punto $B$ está dado; por tanto, también lo está la ordenada $BC$ y, en consecuencia, el punto $C$. Por tanto, $CD$ está dado.

Sea, pues, igual a una cantidad dada $d$, e igualamos $CE$ a $a$ y $CI$ a $e$. Entonces se tiene que:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$$

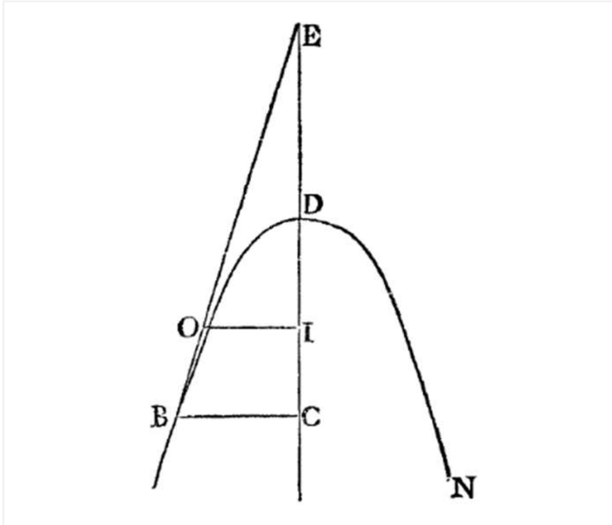
Ahora bien, a causa de la semejanza de los triángulos,

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$$

Por tanto,

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$$

El punto $B$ está dado; por tanto, también lo está la ordenada $BC$ y, en consecuencia, el punto $C$. Por tanto, $CE$ está dado.




Sea, pues, igual a una cantidad dada $d$, e igualamos $CE$ a $a$ y $CI$ a $e$. Entonces se tiene que:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$

Multiplicamos medios y extremos,

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e$$

De acuerdo con el método precedente adigualamos.

(…)

$$de^2 + a^2e \sim 2dae$$

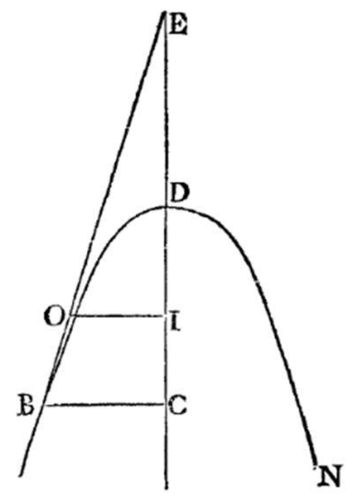
Dividiendo todo por $e$ tendremos:

$$de + a^2 \sim 2da$$

Eliminamos $de$. Queda:

$$a^2 = 2da$$

y, por tanto, $a = 2d$.




Hemos probado de esta forma que *CE* es doble de *CD*, lo que es conforme a la verdad.

**Este método nunca falla, y puede ser aplicado a un gran número de cuestiones muy hermosas**; mediante él, he encontrado los centros de gravedad de figuras limitadas por rectas y curvas, así como los de los sólidos y otras numerosas cosas que podremos tratar en otra parte si dispongo tiempo para ello.

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$$ because O not on the parabola

Similar triangles: $$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$$

$$\longrightarrow \frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$$

$d = CD$
$a = CE$
$e = CI$

$$\longrightarrow \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$

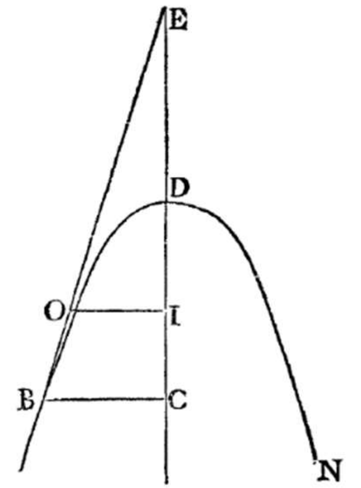
⋮

"adequate"

$$de^2 - 2dae \simeq -a^2 e$$

$$de^2 + a^2 e \simeq 2dae$$

$$de + a^2 \simeq 2da \longrightarrow \boxed{a = 2d}$$



# *Sobre el mismo método*

La teoría de las tangentes es una consecuencia del método de determinación de máximos y mínimos, que permite resolver con mucha facilidad todas las cuestiones del límite y, de una manera particular, los famosos problemas en que, según dice Pappus en el prefacio del libro VII, las cuestiones límites son difíciles.

Las líneas curvas a las cuales hemos determinado las tangentes tienen unas propiedades específicas que se pueden expresar o bien simplemente por líneas rectas, o bien por medio de curvas tan complicadas como queramos con rectas u otras curvas.

Hemos satisfecho el primer caso usando nuestra regla, que, al ser demasiado concisa, puede haber resultado difícil, pero que sin embargo ha sido reconocida legítima.

# *Sobre el mismo método*

De hecho, en el plano, consideramos curvas arbitrarias expresadas por dos posiciones dadas, una de las cuales la podemos llamar diámetro, y la otra, **ordenada (applicata)**.

Entonces consideramos la tangente en un punto dado de la curva ya construida y, por *adigualación*, consideramos la propiedad específica de la curva, no ya sobre la curva, sino sobre la tangente que buscamos.

Eliminamos, de acuerdo con la doctrina de los máximos y los mínimos, los términos que sea necesario, y llegamos a una igualdad que permite determinar el punto de corte de la tangente con el diámetro y, por lo tanto, la propia tangente.

Pla, Viader i Paradís (2008), pp. 167-168

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$$ ... abola

$$\frac{BC^2}{CD} < \frac{OI^2}{DI}$$

Similar triangles: $\frac{\quad}{OI^2}$ ... $\frac{\quad}{IE^2}$

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$$

$d = CD$
$a = CE$
$e = CI$

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$

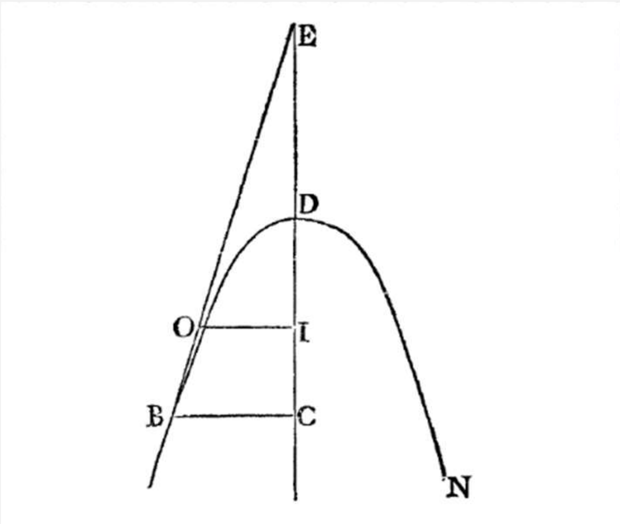
$\vdots$

"adequate"

$$de^2 - 2dae \simeq -a^2 e$$

$$de^2 + a^2 e \simeq 2dae$$

$$de + a^2 \simeq 2da \longrightarrow \boxed{a = 2d}$$

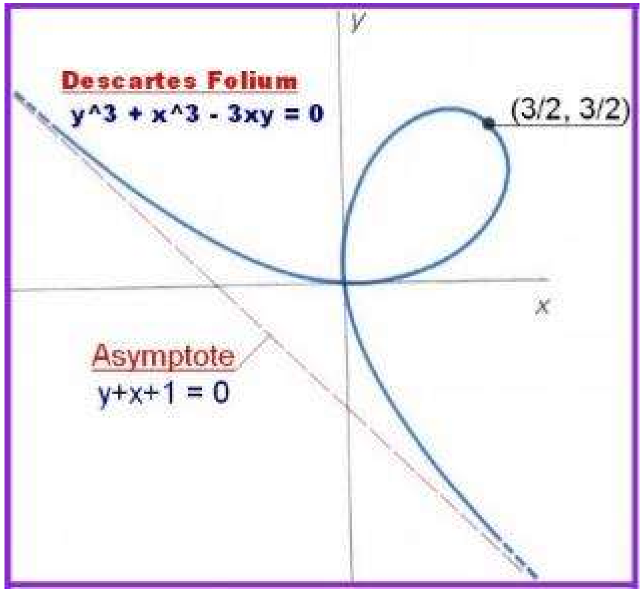


## *Controversia Fermat-Descartes*:

Descartes considera que el método de Fermat sólo funciona en el caso de la parábola.

Descartes cree que su método es más útil y más general, mientras que el método de Fermat depende de la relación explícita entre abscisa y ordenada.

Reto: ¿Determinación de la tangente al *fòlium de Descartes*?



# *A modo de justificacón…*

## Fermat's Method of Finding Extrema

Recall that in the quadratic polynomial $x^2 + bx + c$, the coefficient $b$ is equal to the negative sum of the two roots, while the constant term $c$ is equal to the product of the two roots. We know this relationship holds whether the roots are positive, negative, or even complex. However, in the seventeenth century, mathematicians were not too comfortable with either negative or complex roots of equations. Thus, François Viète, for example, only considered quadratic equations which had two positive roots in dealing with the relationship between the roots and the coefficients. Such a quadratic equation can be written in the form $bx - x^2 = c$. To discover the relationship between the two roots, $x_1$ and $x_2$, he equated the two expressions $bx_1 - x_1^2$ and $bx_2 - x_2^2$. Then

$$x_1^2 - x_2^2 = bx_1 - bx_2 \qquad \text{or} \qquad (x_1 + x_2)(x_1 - x_2 = b(x_1 - x_2.$$

Thus, when he divided through by $x_1 - x_2$, he found that $x_1 + x_2 = b$, that is, "$b$ is the sum of the two roots being sought." Substituting $x_1 + x_2$ for $b$ in the equation $bx_1 - x_1^2 = c$, he found the other relationship $x_1 x_2 = c$, or "$c$ is the product of the two roots being sought."

Katz et al (2004). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, MAA, pp. 110-111

Fermat, in the late 1620s, was stimulated to consider the question of extrema by a study of Viète's work relating the coefficients to the roots of a polynomial. Let us consider the problem of dividing a line of length 10 into two parts whose product is maximal. In other words, we want to maximize the function $x(10 - x)$ or $10x - x^2$. Fermat knew from Euclid that the maximum possible value of this function was $25 = (10/2)^2$ and also that for any number less than the maximum, there were two possible values for $x$ whose sum was 10. But what happened as the function approached its maximum value? The geometrical situation made it clear to Fermat that even for this maximum value, the equation had two solutions, each of the same value: $x_1 = \frac{10}{2} = 5$ and $x_2 = 10 - x_1 = 10 - \frac{10}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Thus, following Viète, he set $10x_1 - x_1^2 = 10x_2 - x_2^2$. He rearranged this as $10x_1 - 10x_2 = x_1^2 - x_2^2$, or as $10(x_1 - x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$. Dividing by $x_1 - x_2$, he derived the same result as Viète: $10 = x_1 + x_2$, an equation holding for any two roots. Since the maximum occurs when the two roots are identical, he set $x_1 = x_2 (= x)$ and found that $10 = 2x$. Thus the maximum occurs when $x = \frac{10}{2} = 5$.

In general, Fermat could find the maximum for the function $bx - x^2$ by the same technique. Setting $bx_1 - x_1^2 = bx_2 - x_2^2$, he could rearrange and then divide by $x_1 - x_2$. Since now $b = x_1 + x_2$, he could set $x_1 = x_2 = x$ and get $b = 2x$. Then the maximum occurs when $x = \frac{b}{2}$.

Katz et al (2004). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, MAA, pp. 110-111

This insight gave Fermat a general method for maximizing a polynomial $p(x)$: Set $p(x_1) = p(x_2)$. Then divide through by $x_1 - x_2$ to find the relationship between the coefficients and any two roots of the polynomial. Finally, set the two roots equal to one another and solve.

Thus, to maximize $bx^2 - x^3$, Fermat set $bx_1^2 - x_1^3 = bx_2^2 - x_2^3$ and derived

$$b(x_1^2 - x_2^2) = x_1^3 - x_2^3 \qquad \text{or} \qquad b(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

Then $bx_1 + bx_2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Fermat then set $x_1 = x_2$ $(= x)$ and determined that $2bx = 3x^2$, from which he concluded that the maximum value occurs when $x = \frac{2b}{3}$. In fact, Fermat realized that in general his method would give him either a maximum of a minimum for the function. So to decide which of the two cases held, he used geometry. After all, his problems were algebraic translations of geometric problems.

Katz et al (2004). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, MAA, pp. 110-111

Fermat's method does raise a significant question. How can one divide through by $x_1 - x_2$ and then set that value equal to 0? After all, you know that you are not allowed to divide by 0. For Fermat, the geometric situation showed that the roots were even distinguishable when their difference was 0. Thus, he never felt he was dividing by 0. He simply assumed that the relationships worked out using Viète's methods were perfectly general (for example, $x_1 + x_2 = b$) and thus held for any particular values of the variables, even those at the maximum.

Fermat did realize, however, that if the polynomial $p(x)$ were somewhat complicated, the division by $x_1 - x_2$ might be rather difficult. Thus he modified his method to avoid this. Instead of considering the two roots as $x_1$ and $x_2$, he wrote them as $x$ and $x + e$. Then, after equating $p(x)$ with $p(x + e)$, he had only to divide by $e$ or one of its powers. In the resulting expression he then removed any term that contained $e$ to get an equation enabling the maximum to be found. Thus, using his original example of $p(x) = bx - x^2$, Fermat put $bx - x^2$ equal to $b(x+e) - (x+e)^2 = bx - x^2 + be - 2ex - e^2$. Canceling common terms gave him $be = 2ex + e^2$. After dividing by $e$, he found $b = 2x + e$. Removing the term which contains $e$ gave Fermat his known result: $x = \frac{b}{2}$.

Katz et al (2004). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, MAA, pp. 110-111

# REFLEXIONES FINALES

## SEMEJANZAS...

- Entendimiento de la conexión fundamental entre las **curvas geométricas** y una **ecuación algebraica con dos incógnitas**.

- Como herramienta básica, un **único eje** a lo largo del cual se media una de las incógnitas, en lugar de los dos ejes utilizados hoy en día.

- Uso de las **secciones cónicas** como ejemplos clave.

- Construcción de **curvas** cuyas ecuaciones son de **grado superior a dos**.

- **Nueva relación álgebra-geometría:** álgebra al servicio de la geometría, una herramienta más flexible, no sólo para resolver ecuaciones, también para hallar curvas, para el estudio del movimiento, central en el desarrollo del cálculo.

## SEMEJANZAS...

- Entendimiento de la conexión fundamental entre las **curvas geométricas** y una **ecuación algebraica con dos incógnitas**.
- Como herramienta básica, un **único eje** a lo largo del cual se medía una de las incógnitas, en lugar de los dos ejes utilizados hoy en día.
- Uso de las **secciones cónicas** como ejemplos clave.
- Construcción de **curvas** cuyas ecuaciones son de **grado superior a dos**.
- **Nueva relación álgebra-geometría:** álgebra al servicio de la geometría, una herramienta más flexible, no sólo para resolver ecuaciones, también para hallar curvas, para el estudio del movimiento, central en el desarrollo del cálculo.

## ... Y DIFERENCIAS

- **Fermat** parte de una ecuación para llegar a la curva.
- **Descartes** parte de la descripción geométrica de una curva, para hallar su ecuación.
    - Tiene que trabajar con ecuaciones algebraicas más complejas que las de Fermat.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOS, H. J. M. (1999). *Redefining geometrical exactness : Descartes' transformation of the early modern concept of construction.* New York : Springer.

BOYER, C. B. (2004). *History of Analytic Geometry.* New York: Dover (repub. de 1956).

DORCE, C. (2014). *Història de la matemàtica. Des del segle XVII fins a l'inici de l'època contemporània*. Barcelona: Edicions UB.

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag.

GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (2003). *Los orígenes de la geometria analítica*. La Orotava: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial.* Nivola.

MAHONEY, M. S. (1994). *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1ª ed., 1973].

PLA, J., VIADER, P. (1999). *René Descartes. La geometria*. Clàssics de la Ciència. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans/Editorial Pòrtic/Eumo Editorial.

PLA, J., VIADER, P., PARADÍS, J. (2008). *Pierre de Fermat. Obra Matemàtica vària*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press.

UIMP
Universidad Internacional Menéndez Pelayo

# LOS ORÍGENES DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA: DESCARTES Y FERMAT

*MUCHAS GRACIAS*