Formación matemática y didáctica del profesor de Educación Secundaria

Lluís Bibiloni

Seminario PROPOME
Granada 23 y 24 de febrerode 2006

Introducción

En estas breves notas me propongo reflexionar sobre algunos aspectos de la formación del profesor de matemáticas desde la perspectiva que me ha proporcionado ser el responsable de la docencia de una de las asignaturas de didáctica de la matemática en el postgrado de formación del profesorado dirigido a licenciados en matemáticas que, bajo distintos nombres, venimos ofreciendo en la Facultat de Ciències de la Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona durante los últimos seis años.

Mi propósito es buscar puntos de encuentro y no de confrontación abordando la cuestión de si lo que se ha venido considerando como imprescindible para la formación matemática de los graduados, debe ser causa de dificultades en la formación didáctica del futuro profesor.

Trataré de plantear preguntas y apuntar respuestas. ¿Cuál es la formación matemática que debería tener un profesor de secundaria? ¿Debería ser la formación matemática *básica* de un graduado que quiera ser profesor, distinta de la de los que tengan otra orientación profesional, sea la industria o la investigación?

Tengo la convicción de que una sólida formación matemática debería facilitar la adquisición de una sólida formación didáctica. Y esto no es solamente conveniente sino que es de una acuciante necesidad. La brevedad de un master (60 ECTS's) y el peso específico de las asignaturas de matemáticas y de didáctica de la matemática que en él se puedan impartir, no podrían corregir las insuficiencias en la formación matemática de los graduados si éstas se dieran. En lo que a la formación matemática se refiere, las asignaturas de didáctica sólo pueden proponerse completar algunos aspectos que sí son específicos e imprescindibles para el futuro docente.

Me permitirán que para tratar el tema desde esta perspectiva me tome la licencia de apoyarme en las palabras de autores de reconocido prestigio que se han ocupado del tema y que, en particular, para vertebrar el discurso, abuse del legado que nos ha dejado Pedro Puig Adam. La claridad de su planteamiento, su sorprendente actualidad y su envidiable capacidad de síntesis así me lo aconsejan. El intento de reformulación con mis propias palabras redundaría en un empobrecimiento inaceptable o en el plagio. Esta es la razón de la profusión de citas que aquí se encontraran. Las negritas de las citas son mías.

Formación matemática y formación didáctica

Puig Adam [1960, p. 94] ilustra las dificultades que hay que afrontar para atacar el problema didáctico con las siguientes palabras:

> ... la didáctica como arte, como ciencia o como simple técnica, toma cuerpo cuando los conocimientos adquiridos por la humanidad empiezan a rebasar las posibilidades de asimilación del educando, creando problemas de **selección**, de **sistematización** y de **presentación**, es decir de **programa**, de **método** y de **modo**. Por último, estos problemas pasan a la categoría de problemas pedagógicos cuando se enfoca con ellos no sólo la más eficaz transmisión de conocimientos, sino además la huella formativa que dicho proceso de transmisión debe dejar impresa en el educando.

A todo ello antepone, sin embargo, la cuestión de la *finalidad* de la educación. Sólo después de contestar a esta pregunta: ¿A dónde vamos? es pertinente plantearse las preguntas relativas al método: ¿por dónde vamos? y al modo: ¿Cómo vamos?

La finalidad de la educación

Ésta es una cuestión a la que, en mi opinión, no se le da la relevancia que merece y que quiero destacar en primer lugar. Es de importancia capital que un profesor de matemáticas de cualquier nivel, tenga una idea clara y explícita de cuál es el objetivo que persigue con su docencia. Sólo así podrá darle la orientación adecuada para cumplir dichos objetivos. Hace más de cien años David Eugene Smith [Smith, 1900, p. 1] lo enfatizaba en su *The Teaching of Elementary Mathematics*

> Para alguien que se está preparando para enseñar en cualquier rama y que espera tener éxito, la pregunta más importante es: ¿Por qué se enseña esta materia?

Ponerse de acuerdo en este tema no es fácil; de ello da suficiente evidencia un articulo de Rico [1997] donde se trata el tema con amplitud y desde una perspectiva actual.

Un master de formación de profesores de secundaria debería ofrecer los elementos para que los estudiantes pudieran formarse opinión propia a este respecto y, así, capacitarlos para abordar los problemas que se presentan en el aprendizaje y la enseñanza en esta etapa educativa.

Por mi parte, me limitaré a dar mi opinión de forma esquemática haciendo mías las palabras de Rey Pastor y Puig Adam en el prólogo de su *Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental* [Rey Pastor y Puig Adam, 1933]. Consignan que la enseñanza primaria debe tener un carácter predominantemente *instrumental* mientras que la finalidad de la secundaria debe tenerlo predominantemente *educativo* y asignan a la enseñanza universitaria un fin *profesional* añadiendo que:

> Esta divisoria en tres períodos *instrumental*, *educativo* y *profesional* no excluye la **preocupación educativa** en todos ellos; pero mientras en el primero la educación es un medio para llegar a los conocimientos, en el segundo son los conocimientos el medio necesario para llegar a la educación mental.
>
> He aquí, pues, una distinción de **esencia**, que no es puramente cuantitativa entre la enseñanza primaria y la secundaria.
>
> ... porque, a fin de cuentas, ese imponderable que se llama *cultura general* no es sino aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el período escolar.

Permítanme señalar aquí que de esta preocupación educativa en el ámbito universitario, es decir de la huella formativa, se hace eco uno de los matemáticos de más prestigio del siglo XX. Se trata de una conferencia del año 54 de la cuál se publico un resumen estructurado en 9 puntos bajo el título *Mathematical Teaching in Universities* [Weil, 1954].

En el primer punto afirma que la mejora de la educación matemática en las universidades depende en gran parte de la mejora del sistema educativo en general y en los dos puntos siguientes afirma:

> No se pueden obtener resultados satisfactorios si las reformas no se llevan a cabo simultáneamente en las escuelas y en las universidades. En lo que hace referencia a la enseñanza en las escuelas, los esfuerzos de los matemáticos deben ir básicamente dirigidos a efectuar cambios en el currículo y a la formación de mejores profesores (teachers).
>
> La enseñanza de la matemática en las universidades debería:
>
> a) Dar respuesta a los requerimientos de todos los necesitan de las matemáticas con fines prácticos
>
> b) Formar especialistas
>
> c) Ofrecer a todos los estudiantes la formación intelectual y moral que toda Universidad, que sea merecedora de este nombre, tiene el deber de impartir.

Los atributos del profesor

Al hablar de la formación del profesorado de enseñanza media Puig Adam [1960]p. 409, articula su propuesta en función de las respuestas a tres interrogantes esenciales que reflejan de nuevo los problemas de programa, método y modo:

1. ¿Qué es lo que el niño debe saber? [programa]
2. ¿Qué es lo que el niño puede aprender? [método]
3. ¿Cómo lograr que el niño quiera aprender? [modo]

Los atributos que corresponden al profesor son:

1. Cultura Científica.
2. Conocimiento del niño.
3. Arte.

Añade que *la cultura* del profesor debe ser matemática y científica, epistemológica, histórica y humana. Su cultura matemática debe intentar nutrirse de la cultura del investigador (de creación y de análisis) a la vez que de la cultura del técnico (por su conexión con el mundo físico y la realidad). De esta manera realizará mejor su misión en la doble vertiente, educativa y utilitaria.

Métodos y Modos

La distinción terminológica entre métodos y modos, hoy en desuso, es un tanto sutil tal como el propio Puig Adam reconoce. Insistiré un momento en ello porque he dicho que mi intención era buscar puntos de encuentro entre la formación matemática que se debe obtener en el grado y la complementaria formación didáctica que debe ser el objeto de un postgrado de formación de profesores de secundaria y es en la cuestión del modo, tal como lo entiende este autor, donde creo que es más fácil establecer puentes. Ejemplos de métodos son: analítico, sintético, inductivo, deductivo, intuitivo, racional, cíclico, histórico, etc. Y de modos: activo, pasivo, eurístico, magistral, individual, colectivo, etc.

Desafortunadamente, todavía esta muy extendida la practica de presentar la matemática como un sistema acabado, sin fisuras. En otras palabras como una colección de soluciones a problemas que, para el estudiante, nunca han sido planteados. En el nivel universitario esto sucede, en parte, por el mismo motivo que en secundaria, la inercia. Y en parte, porque el espectacular crecimiento de la matemática en el último siglo ha conducido inevitablemente hacia la especialización. Un efecto secundario de esta tendencia es que los jóvenes graduados tienen una percepción de la matemática separada en compartimentos estancos cuya consistencia se sustenta sobre la abstracción y la generalización.

Sin embargo, para la enseñanza secundaria es fundamental tener una visión de conjunto y esto acarrea serios problemas porque está suficientemente contrastado que la inclinación natural de un profesor inexperto es enseñar de la misma forma que ha sido enseñado y esta tendencia a mimetizar es difícil de erradicar.

Puig Adam [1960, p. 95] ilustra el problema de la siguiente forma:

> La ciencia crece por procesos mixtos de análisis y síntesis de inducción y de deducción. Se acumulan experiencias y observaciones, se registran hechos, se inducen leyes y se tejen deductivamente sistemas. La presentación sistemática de tales urdimbres da una indudable solidez al conjunto presentado; **pero no enseña precisamente a urdir, que es lo educativo.**

Pocas páginas más adelante afirma:

> ... antes de iniciar el método lógico ha de haberse acumulado en la mente del alumno un rico caudal concreto de observaciones, experiencias y de intuiciones efectuadas desde los primeros años de la escuela y que, sedimentadas en el inconsciente del niño, sean el germen de los conceptos abstractos.
>
> La facultad de abstracción no se desarrolla razonando *in abstracto* sino empezando por lo concreto. Si abstraer es prescindir de algo, es preciso que empiece por existir este algo de que se puede prescindir. La deficiencia de la enseñanza de tipo clásico en este punto consiste en **dar las abstracciones hechas y no enseñar a formarlas que es lo útil y eficaz.**

El conocimiento de la evolución de la inteligencia del estudiante en cada etapa debe guiarnos en la elección de los métodos más apropiados a su desarrollo intelectual. La consideración de la ley biogenética sugiere la adopción del método genético y la continuidad de la evolución psíquica aconseja la “conveniencia de organizar la enseñanza cíclicamente” todo ello impregnado por el cultivo de la intuición.

Es remarcable la sintonía que se percibe con la opinión de Richard Courant (reproducido en [Kline, 1976, p. 143])

> ... la sangre vital de nuestra ciencia procede de sus raíces;
>
> ...

> La abstracción y la generalización no son más vitales para las matemáticas que los fenómenos concretos y sobre todo no lo son más que la intuición inductiva. Sólo la síntesis y la interacción de estas fuerzas, pueden mantener las matemáticas vivas y evitar que se sequen convirtiéndose en un esqueleto muerto.
>
> ...
>
> Quizá la amenaza más seria de la unilateralidad hace referencia a la educación. Una enseñanza inspirada por profesores competentes, ampliamente informados es hoy, más que nunca, una necesidad abrumadora para nuestra sociedad. Es verdad que los planes son importantes, pero las peticiones de reforma no deben encubrir las pérdidas de contenido, la propaganda a favor de una abstracción carente de interés, el aislamiento de las matemáticas, el abandono del ideal del método socrático en favor de los métodos del dogmatismo catequético.

El método socrático es muy parecido a lo que Puig Adam [1960, p. 144] denomina el modo eurístico y que preconiza como el más adecuado para la educación secundaria:

> Se siente la necesidad imperiosa de una didáctica no sólo activa, sino **eurística** en el sentido de procurar que el alumno elabore por sí mismo los conceptos y conocimientos que haya de adquirir, mediante el acicate de situaciones hábilmente creadas ante él por el maestro, con objeto de que el interés funcional y directo por ellas despertado sea suficiente para fomentar la actividad generadora. ... Sólo cultivando el espíritu de investigación y de conquista se asegura a un tiempo, la firmeza de lo adquirido y la continuidad histórica del progreso.
>
> ...
>
> Y obsérvese que no buscamos una didáctica facilona y blandengue, sino, por el contrario una fortaleza de conocimientos y un impulso basados en el esfuerzo del niño ...

También en este sentido hay sintonía ente Puig Adam y Courant [Courant y Robbins, 1978] quien advierte que el “conocimiento no se puede adquirir sólo mediante métodos indirectos”, es decir, de tipo divulgativo o descriptivo. En palabras de Euclides según cuenta la tradición “No hay camino real”. Así pues, los beneficios de una educación matemática de calidad no se pueden obtener a costa de desvirtuar la auténtica naturaleza del conocimiento matemático y la adquisición del conocimiento implica un esfuerzo que además, debe ser voluntariamente asumido y el profesor debe disponer de recursos para motivarlo. En cualquier nivel educativo, la superación de una asignatura debería ser vivida con satisfacción, como la justa recompensa al esfuerzo invertido y, en ningún caso como la liberación de un sacrificio impuesto gratuitamente. Como veremos, es opinión de muchos que la conveniencia del método socrático o modo eurístico para superar estas dificultades, no se restringe al ámbito de la educación secundaria.

Mi principal preocupación como profesor de postgrado es ofrecer a los graduados la oportunidad de familiarizarse con todas estas ideas para que puedan tomar decisiones desde este conocimiento y, si es posible, convencerlos sin imponer. ¿Pero es posible conseguir resultados razonables si su percepción de la matemática no sintoniza con los principios que quiero transmitir? En mi opinión es muy difícil sino imposible. Con la intención de establecer puntos de contacto entre formación matemática y formación didáctica, permítanme que abuse de su paciencia y cite a Puig Adam por última vez. Se trata de un párrafo que lleva por título ≪Tarea a realizar en materia de métodos y modos. Llamamiento a la Universidad≫ [Puig Adam, 1960, p. 108]. Haciendo referencia al profesor recién licenciado dice:

> ¿Cómo va a descender súbitamente del elevado plano de las abstracciones matemáticas que elabora hoy la Topología, el Álgebra moderna, el Análisis abstracto ... , al plano realista y concreto de la limitada mentalidad de un niño de diez años?

Parece claro que guiar al joven graduado en este descenso debe ser el objetivo fundamental de un master de formación de profesores. Pero agrega

> Y aún si me apuráis añadiré que no sólo en el descenso, sino también en el ascenso a tales abstracciones, la Universidad, tarde o temprano, se verá forzada a considerar los problemas didácticos en su propia enseñanza, como los consideró la enseñanza primaria en el siglo pasado y los cuida en el presente la enseñanza secundaria. Los problemas de finalidad, método y modo son sensiblemente los mismos, con las modalidades y diferencias propias de la edad. A toda edad es perjudicial el divorcio excesivo entre los procesos de génesis y de transmisión de conocimientos. A toda edad es indicada la conveniencia del modo eurístico, y a toda edad el interés hacia la materia en estudio, hábilmente despertada por el maestro, seguirá siendo el principal estímulo de la atención y la mejor fuente de energía psíquica para vitalizar una atención fatigada.

Algunas opiniones

Hasta aquí he intentado esbozar parte de lo que considero el bagaje necesario para un profesor de secundaria, pero ya he dicho que esto es muy difícil de conseguir si la formación del graduado no está ya en sintonía con estos principios. ¿Es esta petición que, hace cincuenta años, hacía Puig Adam a la Universidad una quimera? ¿Son los principios relativos a métodos y modos que hemos reseñado un lastre para la formación del futuro investigador? Quisiera pensar que no, pero lo importante no es lo que yo piense sino lo que piensan algunos de los matemáticos de más prestigio del siglo XX que han sabido hallar el tiempo para hacernos llegar sus opiniones en materia de educación y que voy comentar a continuación.

La mayor parte de la producción científica de estos matemáticos se podría presentar como un ejemplo del dogmatismo catequético al que hacía referencia Courant en la cita anterior, así como la del mismo Courant. Sin embargo, todos ellos distinguen con claridad entre exposición sistemática basada en el método deductivo y proceso de aprendizaje sin renegar de ninguno.

El propio Courant (reproducido en [Kline, 1976, p. 142]) afirma

> Ciertamente el pensamiento matemático actúa por abstracción, las ideas matemáticas necesitan progresivos refinamientos abstractos, axiomatización y cristalización. Es cierto que cuando se alcanza un nivel más alto de comprensión estructural, se hacen posibles importantes simplificaciones.
>
> ...
>
> Sin embargo la sangre vital ...

En lo relativo al papel de la intuición en la formación matemática es instructiva la lectura del articulo de Poincaré [1889] titulado «La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement» del que sólo reproduzco los dos párrafos finales.

> ... en el primer año de 'd'Ecole polytehcnique', no se debe hablar de funciones sin derivada solo se mencionará: puede haberlas pero nosotros no nos ocuparemos de ello.
>
> La primera vez que se hable a los alumnos de las integrales se las definirá como superficies, y sólo cuando hayan calculado muchas integrales se dará la definición rigurosa.

Para profundizar en el uso del método genético en la educación, seguramente la mejor fuente es el texto de Toeplitz [1963], *The Calculus a Genetic Aproach*, escrito con la intención de paliar las dificultades que se suelen encontrar en los cursos de iniciación al cálculo infinitesimal. Se basa en el estudio de la historia de la matemática pero sin excesos. Reproduzco unas frases del prefacio en que Gottfried Köthe cita al propio Toeplitz

> El historiador (el historiador de las matemáticas, también) ha de registrar todo aquello que ha pasado, sea bueno o malo. Yo, al contrario, quiero seleccionar y utilizar de la historia de las matemáticas sólo los orígenes de aquellas ideas que han demostrado su valor. ... No es en la historia por la historia en lo que estoy interesado, sino en la génesis, en sus puntos cardinales de problemas, hechos y demostraciones.

Köthe señala que Toepliz también se propone conducir al principiante a un entendimiento y dominio del 'epsilontic' pero que quiere conducirle a la maestría en esta técnica "gradualmente, a través de una ascensión ágil". De nuevo en palabras de Toeplitz:

> El método genético es la guía más segura hacia esta ascensión ágil, la cual no es siempre fácil de encontrar. Seguid el curso genético, que es el camino que el hombre ha seguido en su comprensión de las matemáticas y veréis que la humanidad ascendió gradualmente de lo simple a lo complejo. Explosiones ocasionales de grandes desarrollos se pueden entender usualmente como indicadores de un progreso metódico previo. Los métodos didácticos se pueden beneficiar pues, inconmensurablemente del estudio de la historia.

Quizá aquí vengan a colación unas palabras de Hans Freudenthal en el prefacio de su *Mathematics as an educational task* [Freudenthal, 1973, p. V] que, a mi entender, hacen referencia al mismo principio.

> Es cierto que no debes comunicar tus matemáticas a los otros en la forma que se te ocurrieron, sino como se te podrían haber ocurrido si hubieras sabido lo que sabes ahora.

George Pólya es quien puso de moda la hoy tan en boga 'Resolución de Problemas' pero su obra no se reduce al conocido *How to Solve It.* La resolución de problemas es, de hecho una defensa magistral de la mayoría de principios didácticos que hemos comentado: enseñanza activa, método socrático, etc. Una pequeña muestra de su pensamiento es «On Learning, Teaching, and Learning Teaching» [Pólya, 1963]. Pólya insiste en el hecho de que los resultados matemáticos, antes de demostrarlos hay que descubrirlos y que en este cometido el razonamiento plasuble juega un papel fundamental, papel que se debe hacer explícito en la enseñanza. Su inquietud para mejorar la enseñanza de la matemática viene de lejos, en este caso en la enseñanza de la matemática superior, como muestra su *Problems and Theorems in Analysis* [Pólya y Szegö, 1976], publicado por primera vez en 1925.

Gran defensor del método socrático y la matemática a través de los problemas en la enseñanza superior es Paul Halmos. Defiende su posición en

«The heart of mathematics» [Halmos, 1980]. En «The Problem of Learning to Teach» [Halmos *et al.*, 1975] afirma:

> la mejor manera de aprender es hacer; la peor manera de enseñar es hablar.

y en «What is Teaching» [Halmos, 1994] es aún más provocativo y a la pregunta ¿Qué es la enseñanza? se responde:

> Cuanto más trataba de pensar qué debía decir, más me inclinaba a la conclusión de que nadie puede enseñar nada a nadie de ninguna manera (nobody cain't never teach nobody nuttin' nohow). No lo digo completamente en serio, pero sí más en serio que lo contrario.

En esta sección les he ofrecido fragmentos desconexos que tienen la modesta intención de ilustrar actitudes. Para profundizar en el cometido que debe tener el matemático en la educación desde un punto de vista general, son de gran interés los artículos de Miguel de Guzmán [de Guzmán, 1996], «El papel del matemático en la educación matemática» y el del actual Presidente del ICMI, Hyman Bass [Bass, 2005], «Mathematics, mathematicians, and mathematics education».

Epílogo

El venerable texto de Felix Klein *Matemática elemental desde un punto de vista superior* [Klein, 1927] (publicado por primera vez en 1907) y *¿Qué es la Matemática?* de Courant y Robbins [1978] son ejemplos del interés con que algunos matemáticos se han ocupado del tema educativo y en *Why the Professor Can't Teach*, Kline [1977] analiza en profundidad las dificultades de la enseñanza de la matemática en el ámbito universitario. La manifiesta antigüedad de estos textos y de la mayoría de las citas de estas notas que es, en parte, intencionada, pone en evidencia una vez más que las dificultades en la enseñanza de la matemática no son cosa nueva.

En el texto *The Mathematical Education of Teachers* de la Conference Board of the Mathematical Sciences [2001] donde, con muy buen sentido, se analizan dificultades y se proponen soluciones desde la perspectiva actual en los Estados Unidos, el lector comprobará que a pesar de los enormes esfuerzos llevados a cado por la comunidad matemática en general y por la de los investigadores en educación matemática en particular, desde hace más cien años los problemas persisten con una tozudez sorprendente. En concreto, en el capítulo 5 [p. 121] se afirma que la investigación ha demostrado que *no* hay correlación entre el rendimiento de los estudiantes (en el nivel de nuestro bachillerato) y la mayor o menor formación matemática de los profesores que imparten la asignatura (medida en base al número de créditos de matemáticas cursados en el grado) y a mí, esto, me parece inaceptable. Sin embargo, quiero ver motivos para el optimismo, aunque sea moderado.

La convergencia hacia un espacio educativo común con Europa que afecta a grados y postgrados, obliga a una revisión en profundidad de los planes de estudios y a su vez es una ocasión para introducir cambios metodológicos. En el *Documento de trabajo sobre la integración de los estudios españoles de matemáticas en el espacio europeo de educación superior*, leía con gran satisfacción que "No hay enseñanza si no hay aprendizaje" frase que se hace eco de la vieja máxima de que el estudiante es el centro del acto de aprendizaje y, por lo tanto debe ser el centro del acto de enseñanza.

Si estas opiniones de personajes de reconocido prestigio que hemos intentado reflejar aquí, se introdujeran en la educación superior para colaborar en la mejor formación matemática de los graduados o si se piensa que tomarlas en consideración en las facultades no ha de perjudicar su formación disciplinar, no me cabe ninguna duda que se daría un paso de gigante para la formación didáctica de los futuros profesores.

Referencias

Bass, Hyman (2005): «Mathematics, mathematicians, and mathematics education». *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, tomo 42(4): páginas 417–430. URL `http://www.ams.org/bull/2005-42-04/S0273-0979-05-01072-4/home.html`.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001): *The Mathematical Education of Teachers*. Mathematical Association of America, in cooperation with the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. URL `http://www.cbmsweb.org/MET_Document/index.htm`.

Courant, Richard; Robbins, Herbert (1978): *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, New York.

de Guzmán, Miguel (1996): «El papel del matemático en la educación matemática». En *Actas del Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". URL `http://usuarios.bitmailer.com/mdeguzman/guzmanpa/papeldelmatematico.htm`.

Freudenthal, Hans (1973): *Mathematics as an educational task.* Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Halmos, P. R. (1980): «The heart of mathematics». *Amer. Math. Monthly*, tomo 87(7): páginas 519–524. URL http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28198008%2F09%2987%3A7%3C519%3ATHOM%3E2.0.CO%3B2-P.

Halmos, Paul R. (1994): «What is Teaching». *Amer. Math. Monthly*, tomo 101(9): páginas 848–854. URL http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28199411%29101%3A9%3C848%3AWIT%3E2.0.CO%3B2-N.

Halmos, Paul R.; Moise, E.; Piranian, George (1975): «The Problem of Learning to Teach». *Amer. Math. Monthly*, tomo 81(5): páginas 466–476. URL http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28197505%2982%3A5%3C466%3ATPOLTT%3E2.0.CO%3B2-B.

Klein, Felix (1927): *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Biblioteca Matemática, Madrid.

Kline, Morris (1976): *El fracaso de la Matemática Moderna.* Siglo XXI de españa editores, S.A., Madrid. URL http://www.marco-learningsystems.com/pages/kline/johnny.html, La dirección electronica reproduce la versión original.

Kline, Morris (1977): *Why the Professor Can't Teach.* St. Martins Press, New York. URL http://www.marco-learningsystems.com/pages/kline/prof.html.

Poincaré, Henri (1889): «La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement». *L'Enseignement Mathématique*, (1): páginas 157–62.

Pólya, George (1963): «On Learning, Teaching, and Learning Teaching». *Amer. Math. Monthly*, tomo 70(6): páginas 605–619. URL http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28196306%2F07%2970%3A6%3C605%3AOLTALT%3E2.0.CO%3B2-6.

Pólya, George; Szegö, Gabor (1976): *Problems and Theorems in Analysis.* Dos tomos. Springer-Verlag, New York.

Puig Adam, Pedro (1960): *La matemática y su enseñanza actual.* Publicaciones Revista de Enseñanza Media, Madrid.

Rey Pastor, Julio; Puig Adam, Pedro (1933): *Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental*, tomo 1. Imprenta de A. Marzo, Madrid.

Rico, Luis (1997): «Reflexión sobre los fines de la educación matemática». *SUMA*, (24): páginas 5–19.

Smith, David Eugene (1900): *The Teaching of Elementary Mathematics*. The Macmillan Company, New York. URL `http://mathbooks.library.cornell.edu:8085/Dienst/UIMATH/1.0/Display/cul.math/01600002`.

Toeplitz, Otto (1963): *The Calculus. A Genetic Approach*. The University of Chicago Press, Chicago. Editado por Gottfried Köthe.

Weil, André (1954): «Mathematical Teaching in Universities». *Amer. Math. Monthly*, tomo 61(1): páginas 34–36. URL `http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28195401%2961%3A1%3C34%3AMTIU%3E2.0.CO%3B2-5`.